CH05 参数假设检验

更新：2026 年 1 月 9 日

目录

1 假设检验的若干基本概念 **2**

1.1 原假设和备择假设 2

1.2 拒绝域、检验函数和检验统计量 2

1.3 两类错误与功效函数 3

1.4 检验水平和控制犯第一类错误概率的原则 3

1.5 求解假设检验问题的一般步骤 4

2 正态总体参数的假设检验 **4**

2.1 单个正态总体均值 μ 的检验 4

2.2 单个正态总体方差 σ^2 的检验 6

2.3 两个正态总体均值差 $\mu_2 - \mu_1$ 的检验 6

2.4 两个正态总体方差比 σ_2^2/σ_1^2 的检验 6

2.5 极限分布为正态分布的检验 7

2.6 其他检验 7

3 似然比检验 **8**

3.1 似然比检验的定义 8

3.2 若干示例 9

3.3 似然比的渐近分布 14

4 一致最优检验 UMPT **15**

4.1 UMPT 定义 15

4.2 Neyman-Pearson 引理 16

4.3 Neyman-Pearson 引理的逆定理 23

4.4 单调似然比分布族 MLR 23

1 假设检验的若干基本概念

1.1 原假设和备择假设

设有参数分布族 $\{f(x;\theta):\theta\in\Theta\}$，此处 Θ 为参数空间。$X_1,\cdots,X_n$ 是从上述分布族中抽取的简单样本。

在参数假设检验问题中，感兴趣的是 θ 是否属于参数空间 Θ 的某个非空真子集 Θ_0，则命题 $H_0:\theta\in\Theta_0$ 称为**零假设**或**原假设**，其确切含义是：存在一个 $\theta_0\in\Theta_0$ 使得 X 的分布为 $f(x;\theta_0)$。记 $\Theta_i\subseteq\Theta-\Theta_0$，则命题 $H_1:\theta\in\Theta_1$ 称为**对立假设**或**备择假设**。于是假设检验问题表示为

$$H_0:\theta\in\Theta_0 \quad\leftrightarrow\quad H_1:\theta\in\Theta_1$$

其中，若 Θ_0 或 Θ_1 只包含参数空间 Θ 中的一个点，则称为**简单假设**（simple hypothesis）；否则，称为**复合假设**（composite hypothesis）。

1.2 拒绝域、检验函数和检验统计量

定义 1.1 (拒绝域、接受域) 设样本 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)\in\mathscr{X}$，其中 $\mathscr{X}$ 为样本空间。将 $\mathscr{X}$ 分成不相交的两部分 D 和 $\overline{D}=\mathscr{X}-D$，若 $\boldsymbol{X}\in D$ 就拒绝 H_0，而 $\boldsymbol{X}\in\overline{D}$ 就接受 H_0。那么称 D 为**拒绝域**或否定域（reject region），而 $\overline{D}$ 为**接受域**。

定义 1.2 (检验函数) 检验函数 $\varphi(\boldsymbol{X}):\mathscr{X}\to[0,1]$ 是定义在样本空间 $\mathscr{X}$ 上，取值为 $[0,1]$ 的函数。它表示：当有了具体样本 $\boldsymbol{X}$ 后，拒绝 H_0 的概率。

若 $\varphi(\boldsymbol{X})=1$，则以概率为 1 拒绝 H_0；若 $\varphi(\boldsymbol{X})=0$，则以概率为 0 拒绝 H_0（即以概率为 1 接受 H_0）。检验函数有两种，分别对应于两种不同的检验：

1. **非随机化检验**（non-randomized test）。若检验函数 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 只取 0 或 1 两个值。此时拒绝域可表示为
$$D=\{\boldsymbol{X}:\varphi(\boldsymbol{X})=1\}$$
2. **随机化检验**（randomized test）。若对某些样本 $\boldsymbol{X}$ 有 $0<\varphi(\boldsymbol{X})<1$，即检验函数 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 取值于 $[0,1]$。

以简单假设为例，若拒绝域可写作 $D=\{\boldsymbol{X}:T(\boldsymbol{X})>c\}$，其中 $T=T(\boldsymbol{X})$ 为样本 $\boldsymbol{X}$ 对应的统计量。此时称 T 为**检验统计量**，而 c 称为**临值**。这个假设检验对应的非随机化检验函数可表示为

$$\varphi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & T(\boldsymbol{X})>c\\ r, & T(\boldsymbol{X})=c\\ 0, & T(\boldsymbol{X})<c\end{cases}$$

其中 $r\in(0,1)$ 是一个随机变量。

1.3 两类错误与功效函数

定义 1.3 (两类错误) 在假设检验问题中可能出现下列两种情形会犯错误：

1. 零假设 H_0 本来是对的，由于样本的随机性，观察值落入拒绝域 D，错误地将 H_0 拒绝了，称为**弃真**。这时犯的错误称为**第一类错误**（type I error）。
2. 零假设 H_0 本来不对，由于样本的随机性，观察值落入接受域 $\overline{D}$，错误地将 H_0 接受了，称为**取伪**。这时犯的错误称为**第二类错误**（type II error）。

应当注意，**在每一具体场合，只会犯两类错误中的一个**。当检验确定后，犯两类错误的概率也就确定了。我们希望犯两类错误的概率越小越好，但这一点很难做到，在样本大小 n 固定的前提下，二者不可兼得。

定义 1.4 (功效函数) 设 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 是 $H_0:\theta\in\Theta_0 \rightleftarrows H_1:\theta\in\Theta_1$ 的一个检验函数，则

$$\beta_\varphi(\theta)=\mathbb{P}_\theta\{\text{reject } H_0 \text{ use } \varphi\}=\mathbb{E}_\theta[\varphi(\boldsymbol{X})] \qquad \theta\in\Theta$$

称为 φ 的**功效函数**（power function），也称为**效函数**或**势函数**。

知道了检验 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 的功效函数 $\beta_\varphi(\theta)$ 后，就可以计算犯两类错误的概率。若以 $\alpha_\varphi^*(\theta)$ 和 $\gamma_\varphi^*(\theta)$ 分别记犯第一、二类错误的概率，则

1. 犯第一类错误（type I error）的概率可表示为
$$\alpha_\varphi^*(\theta)=\begin{cases}\beta_\varphi(\theta), & \theta\in\Theta_0\\ 0, & \theta\in\Theta_1\end{cases}$$
2. 犯第二类错误（type II error）的概率可表示为
$$\gamma_\varphi^*(\theta)=\begin{cases}0, & \theta\in\Theta_0\\ 1-\beta_\varphi(\theta), & \theta\in\Theta_1\end{cases}$$

1.4 检验水平和控制犯第一类错误概率的原则

Neyman-Pearson 原则：保证犯第一类错误（type I error）的概率不超过指定数值 α（$\alpha\in(0,1)$，通常取较小的数）的检验中，寻找犯第二类错误（type II error）的概率仅可能小的检验。

若记

$$S_\alpha = \{\varphi : \beta_\varphi(\theta) \le \alpha,\ \theta \in \Theta_0\}$$

即 S_α 表示由所有犯第一类错误的概率都不超过 α 的检验函数构成的类。根据 Neyman-Pearson 原则，在 S_α 中挑选"犯第二类错误的概率仅可能小的检验"。

定义 1.5 (检验水平) 设 φ 是一个检验，而 $0 \le \alpha \le 1$。如果 φ 犯第一类错误的概率总不超过 α（或等价地说，$\varphi \in S_\alpha$），则称 α 为检验 φ 的一个水平，而 φ 称为**显著性水平为 α 的检验**，简称水平为 α 的检验。

注意，以上的定义不设计第二类错误（type II error），故称这样的一个假设的检验问题为**显著性检验**（significance test），其检验水平称为显著性水平。如此，检验的水平并不唯一：若 α 是 φ 的水平，则 $\alpha < \alpha' < 1$ 其中 α' 也是 φ 的水平。

定义 1.6 (真实水平) 检验 φ 的最小水平为其真实水平，即

$$\text{real level of } \varphi = \sup_{\theta \in \Theta_0} \{\beta_\varphi(\theta)\}$$

1.5 求解假设检验问题的一般步骤

1. 根据问题的要求提出零假设 H_0 和各择假设 H_1。
2. 导出拒绝域 D 的形式，确定检验统计量 $T = T(\boldsymbol{X})$（无参数，在 H_0 下分布已知）

$$D = \{\boldsymbol{X} : T(\boldsymbol{X}) > c\}$$

   其中临值 c 待定（以 $>$ 为例）。
3. 选取适当水平 α，利用检验统计量的分布求出临界值 c。

$$\alpha^*_\varphi(\theta) = \beta_\varphi(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\varphi(\boldsymbol{X})] \le \alpha \qquad \theta \in \Theta_0$$

   其中 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 为检验函数，满足 $\varphi(\boldsymbol{X}) = \tilde{\varphi}(T)$。
4. 由样本 $\boldsymbol{X}$ 算出检验统计量 $T(\boldsymbol{X})$ 的具体值，代入拒绝域 D 中，与临界值 c 相比较，作出接受或者拒绝原假设 H_0 的结论。

2 正态总体参数的假设检验

2.1 单个正态总体均值 μ 的检验

设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 为从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取的简单样本，求下列三类检验问题

1. $H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \ne \mu_0$
2. $H_0 : \mu \le \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$
3. $H_0 : \mu \ge \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0$

其中 μ_0 和检验水平 α 给定。

(1) 方差 σ^2 已知时，μ 的检验方法

1. 双边检验

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

构造检验统计量 $U = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma$，故有

$$U|\mu = \mu_0 \sim N(0, 1)$$

所以对于拒绝域 $D = \{\boldsymbol{X} : |U| > c\}$ 有

$$\mathbb{P}_{H_0}(|U| > c) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma}\right| > c\right) = \alpha$$

所以 $c = z_{\alpha/2}$ 为标准正态分布的上 $\alpha/2$ 分位数点。

2. 单边检验

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

先考虑检验

$$H_0^* : \mu = \mu_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

构造检验统计量 $U = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma$，仍然有

$$U|\mu = \mu_0 \sim N(0, 1)$$

所以对于拒绝域 $D^* = \{\boldsymbol{X} : U > c\}$ 有

$$\mathbb{P}_{H_0^*}(U > c) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > c\right) = \alpha$$

所以 $c = z_\alpha$ 为标准正态分布的上 α 分位数点。

对于现在的临值 $c = z_{\alpha/2}$，考虑原始的 $H_0 : \mu \leq \mu_0$，此时犯第一类错误的概率为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{H_0}(U > z_\alpha) = \mathbb{P}_{H_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha\right) &= \mathbb{P}_{H_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} > z_\alpha + \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma}\right) \\ = 1 - \Phi\left(z_\alpha + \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma}\right) &\leq 1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha\end{aligned}$$

这是因为 $H_0 : \mu_0 - \mu \geq 0$，以及标准正态分布的概率质量函数 $\Phi(\cdot)$ 单增。故此时仍然满足水平为 α 的检验，拒绝域为 $D = D^* = \{\boldsymbol{X} : U > z_\alpha\}$。

(2) 方差 σ^2 未知时，μ 的检验方法

构造检验统计量 $T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$，则有

$$T|\mu = \mu_0 \sim t_{n-1}$$

其他与方差已知情况类似。

表 1: 单个正态总体均值的假设检验

方差情况	H_0	H_1	检验统计量及其分布	拒绝域
σ^2 已知	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma$ $U \mid \mu = \mu_0 \sim N(0,1)$	$\lvert U \rvert > z_{\alpha/2}$
	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$U > z_\alpha$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$U < -z_\alpha$
σ^2 未知	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$ $T \mid \mu = \mu_0 \sim t_{n-1}$	$\lvert T \rvert > t_{n-1}(\alpha/2)$
	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$T > t_{n-1}(\alpha)$
	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$T < -t_{n-1}(\alpha)$

2.2 单个正态总体方差 σ^2 的检验

同理，见教材《数理统计》（第三版）P 223 – 225。

(1) 均值 μ 已知时，σ^2 的检验方法

(2) 均值 μ 未知时，σ^2 的检验方法

2.3 两个正态总体均值差 $\mu_2 - \mu_1$ 的检验

同理，见教材《数理统计》（第三版）P 226 – 229。

(1) σ_1^2 和 σ_2^2 已知时，$\mu_2 - \mu_1$ 的检验方法

(2) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时，$\mu_2 - \mu_1$ 的检验方法

(3) 成对比较问题

2.4 两个正态总体方差比 σ_2^2/σ_1^2 的检验

同理，见教材《数理统计》（第三版）P 230 – 232。

(1) 均值 μ_1, μ_2 未知时，方差比 σ_2^2/σ_1^2 的检验方法

(2) 均值 μ_1, μ_2 已知时，方差比 σ_2^2/σ_1^2 的检验方法

2.5 极限分布为正态分布的检验

同理，见教材《数理统计》（第三版）P 233 – 238。

(1) Behrens-Fisher 检验问题的近似方法

(2) 比率 p 的大样本检验方法

(3) Poisson 分布参数的大样本检验

(4) 两个比率差的大样本检验问题

2.6 其他检验

例 2.1 (比率 p 精确检验方法) 设 $X_1, \cdots, X_n \in \{0,1\}$ 服从 Bernoulli 分布 $B(1,p)$，于是容易得到 $T = T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n,p)$。下面对 p 构造水平为 α 的随机化假设检验

$$H_0 : p \le p_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : p > p_0$$

解答 构造随机化检验函数 φ 为

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & T > c \\ r, & T = c \\ 0, & T < c \end{cases}$$

先考虑边界情况，即 $p = p_0$ 假设下的效用，即

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{p_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] &= 1 \times \mathbb{P}_{p_0}(T > c) + r \times \mathbb{P}_{p_0}(T = c) \\ &= \underbrace{\sum_{k=c+1}^n \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k}}_{A_{c+1}(p_0)} + r \cdot \underbrace{\binom{n}{c} p_0^c (1-p_0)^{n-c}}_{A_c(p_0) - A_{c+1}(p_0)} \\ &= A_{c+1}(p_0) + [A_c(p_0) - A_{c+1}(p_0)] \cdot r \end{aligned}$$

那么，由概率的左连续性，必 $\exists\, c$ 使得 $\mathbb{P}_{p_0}(T > c) \le \alpha \le \mathbb{P}_{p_0}(T \ge c)$，即

$$\mathbb{E}_{p_0}[\varphi(\boldsymbol{X})]\big|_{r=0} \le \alpha \le \mathbb{E}_{p_0}[\varphi(\boldsymbol{X})]\big|_{r=1}$$

那么，$r \in [0,1]$ 有解

$$r = \frac{\alpha - A_{c+1}(p_0)}{A_c(p_0) - A_{c+1}(p_0)} \in [0,1]$$

使得 $\mathbb{E}_{p_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] = \alpha$。于是检验 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 确定，下面证其对于整个 $H_0 : p \le p_0$ 都满足

$$\mathbb{E}_{\Theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] = \mathbb{E}_{p \le p_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] \le \alpha$$

先证明一个引理（HW 2 已证）：下面的等式恒成立

$$\sum_{k=c}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=c\binom{n}{c}\int_0^p t^{c-1}(1-t)^{n-c}\,dt \qquad \forall\, 0\le t\le p\le 1$$

由积分内函数非负，故上述积分随 p 增大而不减。观察恒等式左式与 $A_c(p)$ 可知 $A_c(p)$ 是关于 p 不减的，即 $A_c(p)\le A_c(p_0)$ 当 $p\le p_0$ 时成立。于是对上面求得的 $r\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{p\le p_0}[\varphi(\boldsymbol{X})]&=A_{c+1}(p)+[A_c(p)-A_{c+1}(p)]\cdot r=A_{c+1}(p)\cdot(1-r)+A_c(p)\cdot r\\&\le A_{c+1}(p_0)\cdot(1-r)+A_c(p_0)\cdot r=A_{c+1}(p_0)+[A_c(p_0)-A_{c+1}(p_0)]\cdot r\\&=\mathbb{E}_{p_0}[\varphi(\boldsymbol{X})]=\alpha\end{aligned}$$

综上可知，如下的随机化检验

$$\varphi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & T>c\\ \dfrac{\alpha-A_{c+1}(p_0)}{A_c(p_0)-A_{c+1}(p_0)}, & T=c\\ 0, & T<c\end{cases}$$

满足 $\mathbb{E}_{\Theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})]\le\alpha$，即是水平为 α 的检验。这里的 c 是 $\mathbb{P}_{p_0}(T>c)\le\alpha\le\mathbb{P}_{p_0}(T\ge c)$ 的解。

3 似然比检验

3.1 似然比检验的定义

定义 3.1 设样本 $\boldsymbol{X}$ 有概率函数 $f(\boldsymbol{X};\theta)$，$\theta\in\Theta$，而 Θ_0 为参数空间 Θ 的真子集，考虑检验问题

$$H_0:\theta\in\Theta_0 \quad\leftrightarrow\quad H_1:\theta\in\Theta_1$$

则统计量

$$\lambda(\boldsymbol{X})=\frac{\sup_{\theta\in\Theta}f(\boldsymbol{X};\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta_0}f(\boldsymbol{X};\theta)}$$

称为关于该检验问题的似然比。而由下述定义的检验函数

$$\varphi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & \lambda(\boldsymbol{X})>c\\ r, & \lambda(\boldsymbol{X})=c\\ 0, & \lambda(\boldsymbol{X})<c\end{cases}$$

称为检验问题的一个**似然比检验**（likelihood ratio test, LRT）。其中 $c,r\ (0\le r\le 1)$ 为待定系数。若样本分布为连续分布时，令 $r=0$，即

$$\varphi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & \lambda(\boldsymbol{X})>c\\ 0, & \lambda(\boldsymbol{X})\le c\end{cases}$$

而系数 c,r 的选择是要使检验具有给定的水平 α。

3.2 若干示例

1. 正态分布总体

例 3.1 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从正态分布族 $\mathscr{F}=\{N(\mu,\sigma^2):\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\in\mathbb{R}^+\}$ 中抽取的随机样本，求下列检验问题的水平为 α 的似然比检验

$$H_0:\mu=\mu_0 \quad\leftrightarrow\quad H_1:\mu\neq\mu_0$$

解答 设 $\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma^2)$，则 $\boldsymbol{\theta}$ 的似然函数为

$$f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2\right\}$$

在这里，参数空间为

$$\Theta=\{\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma^2):\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\in\mathbb{R}^+\}$$

零假设 H_0 对应的 Θ 的子集为

$$\Theta_0=\{\theta=(\mu,\sigma^2):\mu=\mu_0,\sigma^2\in\mathbb{R}^+\}$$

在 Θ 上，μ 和 σ^2 的极大似然估计（MLE）分别为

$$\hat{\mu}=\bar{X}\qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$$

在 Θ_0 上，σ^2 的 MLE 为

$$\tilde{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2$$

故有

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})=f(\boldsymbol{X};\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)=\left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{-n/2}\left(\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2\right)^{-n/2}$$
$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0}f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})=f(\boldsymbol{X};\mu_0,\tilde{\sigma}^2)=\left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{-n/2}\left(\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2\right)^{-n/2}$$

从而有

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{X})&=\left[\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2}\right]^{-n/2}=\left[1+\frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\right]^{n/2}\\&=\left[1+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}\right]^{n/2}\\&:=\left(1+\frac{1}{n-1}[T(\boldsymbol{X})]^2\right)^{n/2}\end{aligned}$$

由此，$\lambda(\boldsymbol{X})$ 为 $|T(\boldsymbol{X})|$ 的严格增函数，故检验的拒绝域 $D=\{\boldsymbol{X}:\lambda(\boldsymbol{X})>c'\}=\{\boldsymbol{X}:|T|>c\}$，其中

$$T|\mu=\mu_0=\left.\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}\right|\mu=\mu_0\sim t_{n-1}$$

故

$$\mathbb{P}_{H_0}(|T|>c)=\alpha \quad \Rightarrow \quad c=t_{n-1}(\alpha/2)$$

从而有

$$\varphi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & |T(\boldsymbol{X})|>t_{n-1}(\alpha/2)\\ 0, & |T(\boldsymbol{X})|\leq t_{n-1}(\alpha/2)\end{cases}$$

是检验的一个水平为 α 的似然比检验。

例 3.2 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从正态分布族 $\mathscr{F}=\{N(\mu,\sigma^2):\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\in\mathbb{R}^+\}$ 中抽取的随机样本，求下列检验问题的水平为 α 的似然比检验

$$H_0:\mu\leq\mu_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1:\mu>\mu_0$$

解答 此时的似然函数 $L_\Theta(\boldsymbol{X})=\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})$ 和 Θ 与之前相同。但

$$\Theta_0=\{\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma^2):\mu\leq\mu_0,\ \sigma^2>0\}$$

故在 Θ_0 的似然函数为

$$\begin{aligned}L_{\Theta_0}(\boldsymbol{X})&=\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0}f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})=\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0}(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2\right\}\\&=\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0}(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2-\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\end{aligned}$$

其增减性取决于函数 $g(\mu)=-(\bar{X}-\mu)^2/\sigma^2$，当 σ^2 固定时。若 $\mu\leq\bar{X}$，易知 $g(\mu)$ 关于 μ 单增，否则单减。因此

1. 当 $\bar{X}>\mu_0$ 时，若 $H_0:\mu\leq\mu_0$ 成立，有 $g(\mu)$ 在 $\mu=\mu_0$ 取到最大。
2. 当 $\bar{X}\leq\mu_0$ 时，若 $H_0:\mu\leq\mu_0$ 成立，有 $g(\mu)$ 在 $\mu=\bar{X}$ 取到最大。

那么，对应 Θ_0 的极大似然函数为

$$L_{\Theta_0}(\boldsymbol{X})=\begin{cases}L_\Theta(\boldsymbol{X}), & \bar{X}\leq\mu_0\\ \left(\dfrac{2\pi e}{n}\right)^{-n/2}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2\right)^{-n/2}, & \bar{X}>\mu_0\end{cases}$$

于是似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & \bar{X}\leq\mu_0\\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2\Big/\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2\right)^{-n/2}=\left(1+\dfrac{T^2}{n-1}\right)^{n/2}, & \bar{X}>\mu_0\end{cases}$$

其中 $T=T(\boldsymbol{X})=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S$。如此，$\lambda(\boldsymbol{X})$ 是关于 $T(\boldsymbol{X})$ 的单增函数。于是拒绝域为

$$D=\{\boldsymbol{X}:\lambda(\boldsymbol{X})>c'\}=\{\boldsymbol{X}:T=T(\boldsymbol{X})>c\}$$

边界情况，即 $\mu=\mu_0$ 时，有 $T\sim t_{n-1}$。即有 $\mathbb{P}(T>t_{n-1}(\alpha)|\mu=\mu_0)=\alpha$，我们取 $c=t_{n-1}(\alpha)$ 为 t_{n-1} 分布的上 α 分位数点，即取检验 φ 为

$$\varphi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & \lambda(\boldsymbol{X})>c' \\ 0, & \lambda(\boldsymbol{X})\leq c'\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \varphi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & T>t_{n-1}(\alpha) \\ 0, & T\leq t_{n-1}(\alpha)\end{cases}$$

下面证明：对完整的 $H_0:\mu\leq\mu_0$，也有功效 $\beta_\varphi(\mu)=\mathbb{E}_{\Theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})]\leq\alpha$。注意到，对 $H_0:\mu\leq\mu_0$ 有

$$\begin{aligned}\beta_\varphi(\mu)=\mathbb{E}_{\Theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})]&=\mathbb{P}_{\mu\leq\mu_0}\left(T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}>t_{n-1}(\alpha)\right)\\&=\mathbb{P}_{\mu\leq\mu_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}>t_{n-1}(\alpha)+\frac{\sqrt{n}(\mu_0-\mu)}{S}\right)\\&\leq\mathbb{P}_{\mu\leq\mu_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}>t_{n-1}(\alpha)\right)=\alpha\end{aligned}$$

故 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 是检验问题 $H_0:\mu\leq\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu>\mu_0$ 水平为 α 的似然比检验。

例 3.3 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从正态分布族 $\mathscr{F}=\{N(\mu,\sigma^2):\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\in\mathbb{R}^+\}$ 中抽取的随机样本，求下列检验问题的水平为 α 的似然比检验

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \quad\leftrightarrow\quad H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$$

解答 此时的似然函数 $L_\Theta(\boldsymbol{X})=\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})$ 和 Θ 与之前相同。但

$$\Theta_0=\{\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma^2):\mu\in\mathbb{R},\ \sigma^2=\sigma_0^2\}$$

故在 Θ_0 的似然函数为

$$L_{\Theta_0}(\boldsymbol{X})=(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2\right\}$$

因此，有似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{X})=\left(\frac{e}{n}\right)^{-n/2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2\right)^{-n/2}\exp\left\{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2\right\}$$

记 $\xi(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2>0/\sigma_0^2$，于是有 $\lambda(\boldsymbol{X})\propto g(\xi)=\xi^{-n/2}e^{\xi/2}$。容易得到 $g(\xi)$ 关于 ξ 先降后升，于是拒绝域为

$$D=\{\boldsymbol{X}:\lambda(\boldsymbol{X})>c''\}=\{\boldsymbol{X}:g(\xi)>c'\}=\{\boldsymbol{X}:(\xi<k_1)\cup(\xi>k_2)\}$$

注意到在 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ 条件下，$\xi\sim\chi^2_{n-1}$，于是有

$$\mathbb{P}(\xi<\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)|H_0)=\frac{\alpha}{2}\qquad\mathbb{P}(\xi>\chi^2_{n-1}(\alpha/2)|H_0)=\frac{\alpha}{2}$$

即取 $k_1=\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)$，$k_2=\chi^2_{n-1}(\alpha/2)$ 分别为 χ^2_{n-1} 分布的上 $1-\alpha/2$ 和 $\alpha/2$ 分位数点。如此我们得到检验

$$\varphi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & [\xi<\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)]\cup[\xi>\chi^2_{n-1}(\alpha/2)] \\ 0, & \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)\leq\xi\leq\chi^2_{n-1}(\alpha/2)\end{cases}$$

是原问题的水平为 α 的似然比检验。

2. 非正态分布总体

例 3.4 (均匀分布) 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从均匀分布族 $\mathscr{F}=\{U(0,\theta):\theta>0\}$ 中抽取的随机样本，求下列检验问题的水平为 α 的似然比检验

$$H_0:\theta\leq\theta_0\quad\leftrightarrow\quad H_1:\theta>\theta_0$$

解答 此时的似然函数为

$$f(\boldsymbol{X};\theta)=\theta^{-n}\cdot\mathbb{I}(0<X_{(n)}<\theta)$$

参数空间 $\Theta=(0,\infty)$，$\Theta_0=(0,\theta_0]$。由于 $X_{(n)}=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ 为 θ 在 Θ 的极大似然估计，故有

$$L_\Theta(\boldsymbol{X})=\sup_{\theta\in\Theta}f(\boldsymbol{X};\theta)=(X_{(n)})^{-n}$$

又 θ^{-n} 随 θ 增大而减小，也容易得

$$L_{\Theta_0}(\boldsymbol{X})=\sup_{\theta\in\Theta_0}f(\boldsymbol{X};\theta)=\begin{cases}L_\Theta(\boldsymbol{X}), & 0<X_{(n)}\leq\theta_0\\ 0, & X_{(n)}>\theta_0\end{cases}$$

故有似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{X})=\frac{L_\Theta(\boldsymbol{X})}{L_{\Theta_0}(\boldsymbol{X})}=\begin{cases}1, & 0<X_{(n)}\leq\theta_0\\ \infty, & X_{(n)}>\theta_0\end{cases}$$

为 $T(\boldsymbol{X})=X_{(n)}$ 的不减函数，故检验的拒绝域形如

$$D=\{\boldsymbol{X}:\lambda(\boldsymbol{X})>c'\}=\{\boldsymbol{X}:X_{(n)}>c\}$$

由 $T=T(\boldsymbol{X})=X_{(n)}$ 的密度函数为 $g(t)=(nt^{n-1}/\theta^n)\cdot\mathbb{I}_{(0,\theta)}(t)$，故考虑边界情况 $\theta=\theta_0$

$$\alpha=\mathbb{P}(X_{(n)}>c|\theta=\theta_0)=\int_c^{\theta_0}\frac{nt^{n-1}}{\theta_0^n}\,dt=1-\left(\frac{c}{\theta_0}\right)^n$$

解得 $c=\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}$，故此时的检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & X_{(n)}>\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}\\ 0, & X_{(n)}\leq\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}\end{cases}$$

检查功效函数

$$\begin{aligned}\beta_\varphi(\theta)&=\mathbb{P}_{\Theta_0}(X_{(n)}>\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha})=\mathbb{P}(X_{(n)}>\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}|\theta\leq\theta_0)=\int_{\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}}^{\theta}\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}\,dt\\&=\theta^{-n}[\theta^n-\theta_0^n(1-\alpha)]=1-(1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n\end{aligned}$$

是关于 θ 的单增函数，故有

$$\beta_\varphi(\theta)\leq\beta_\varphi(\theta_0)=1-(1-\alpha)=\alpha\qquad H_0:\theta\leq\theta_0$$

综上，φ 是原问题水平为 α 的似然比检验。

例 3.5 (指数分布) 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从指数分布族

$$f(X;\theta)=\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{(X-\theta)}{2}\right\}\cdot\mathbb{I}(X\geq\theta)$$

中抽取的随机样本，求下列检验问题的水平为 α 的似然比检验

$$H_0:\theta=\theta_0\quad\leftrightarrow\quad H_1:\theta\neq\theta_0$$

解答 此时，似然函数为

$$f(\boldsymbol{X};\theta)=2^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{n\theta}{2}\right\}\cdot\mathbb{I}(X_{(1)}\geq\theta)$$

关于 θ（$\theta\leq X_{(1)}$）单增，故有 Θ 下的极大似然为

$$L_\Theta(\boldsymbol{X})=f(\boldsymbol{X};X_{(1)})=2^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{nX_{(1)}}{2}\right\}$$

而 $\Theta_0=\{\theta:\theta=\theta_0\}$ 的似然函数为

$$L_\Theta(\boldsymbol{X})=f(\boldsymbol{X};\theta_0)=2^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{n\theta_0}{2}\right\}\cdot\mathbb{I}(X_{(1)}\geq\theta_0)$$

于是，似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{X})=\begin{cases}\exp\left\{\frac{n}{2}(X_{(1)}-\theta_0)\right\}, & X_{(1)}\geq\theta_0\\ \infty, & X_{(1)}<\theta_0\end{cases}$$

注意到，在 $X_{(1)}<\theta_0$ 时，$\lambda(\boldsymbol{X})=\infty$ 一定拒绝；而在 $X_{(1)}\geq\theta_0$ 时，$\lambda(\boldsymbol{X})$ 关于 $X_{(1)}$ 单增。于是拒绝域形如

$$D=\{\boldsymbol{X}:\lambda(\boldsymbol{X})>c'\}=\{\boldsymbol{X}:(X_{(1)}<\theta_0)\cup(X_{(1)}>c)\}$$

那么在 $H_0:\theta=\theta_0$ 下已知 $X_{(1)}$ 的概率密度函数，则 $X_{(1)}>c$ 的概率为

$$\mathbb{P}(X_{(1)}>c|\theta=\theta_0)=\int_c^{\infty}\frac{n}{2}\exp\left\{-\frac{n(t-\theta_0)}{2}\right\}dt=\exp\left\{-\frac{n(c-\theta_0)}{2}\right\}$$

令其等于 α，则有 $c=\theta_0-(2\log\alpha)/n$。那么，构造检验函数

$$\varphi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & (X_{(1)}<\theta_0)\cup\left(X_{(1)}>\theta_0-\frac{2}{n}\log\alpha\right)\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}$$

于是，在 $H_0:\theta=\theta_0$ 下的效用为

$$\begin{aligned}\beta_\varphi(\theta)&=\mathbb{P}(X_{(1)}<\theta_0|\theta=\theta_0)+\mathbb{P}\left(X_{(1)}>\theta_0-\frac{2}{n}\log\alpha\,\middle|\,\theta=\theta_0\right)\\&\leq\mathbb{P}\left(X_{(1)}>\theta_0-\frac{2}{n}\log\alpha\,\middle|\,\theta=\theta_0\right)=\alpha\end{aligned}$$

综上，φ 是原问题水平为 α 的似然比检验。

3.3 似然比的渐近分布

定理 3.1 (Wilks 定理) 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从分布 $\mathscr{F}=\{f(X;\boldsymbol{\theta}):\theta>\Theta\}$ 中抽取的随机样本，其中 $\boldsymbol{\theta}$ 为参数，总体密度函数 f 满足一定的正则条件。则对检验问题

$$H_0:\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0 \quad\leftrightarrow\quad H_1:\boldsymbol{\theta}\in\Theta_1$$

在零假设 $H_0:\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0$ 成立下，当样本大小 $n\to\infty$ 时有

$$2\log\lambda(\boldsymbol{X})\xrightarrow{\mathscr{L}}\chi_d^2$$

其中自由度

$$d=\dim\Theta-\dim\Theta_0>0$$

例 3.6 设样本 $\boldsymbol{X}_i=(X_{i1},\cdots,X_{in_i})$ 为从正态总体 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$ $(i=1,\cdots,m)$ 中抽取的简单随机样本，且全部独立。检验水平为 α 的问题

$$H_0:\sigma_1^2=\cdots=\sigma_m^2 \quad\leftrightarrow\quad H_1:\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2\text{ 不完全相同}$$

解答 设 $\boldsymbol{\theta}=(\mu_1,\cdots,\mu_m;\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)$，易见 $\boldsymbol{\theta}$ 的似然函数为

$$\begin{aligned}L(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{X})&=\prod_{i=1}^m\left[(2\pi\sigma_i^2)^{-n_i/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_i^2}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\mu_i)^2\right\}\right]\\&=\prod_{i=1}^m\left[(2\pi\sigma_i^2)^{-n_i/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_i^2}\sum_{j=1}^{n_i}[(X_{ij}-\bar{X}_i)^2+(\bar{X}_i-\mu_i)^2]\right\}\right]\end{aligned}$$

其中参数空间 $\Theta=\{\boldsymbol{\theta}:\mu_i\in\mathbb{R},\ \sigma_i^2>0\}$，其维数为 $\dim\Theta=2m$。零假设对应的 $\Theta_0=\{\boldsymbol{\theta}:\mu_i\in\mathbb{R},\ \sigma_i^2=\sigma^2>0\}$，其维数为 $\dim\Theta_0=m+1$。记

$$\bar{X}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}\qquad S_i^2=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2\qquad S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m n_iS_i^2$$

此处 $n=\sum_{i=1}^m n_i$。容易得到 μ_i 和 σ_i^2 在 Θ 下的 MLE 为 $\hat{\mu}_i=\bar{X}_i$, $\hat{\sigma}_i^2=S_i^2$，故极大似然函数为

$$L_\Theta(\boldsymbol{X})=\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}L(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{X})=(2\pi e)^{-n/2}\prod_{i=1}^m S_i^{-n_i}$$

而当 $H_0:\sigma_i^2=\sigma^2$ 时，σ^2 的 MLE 为 $\hat{\sigma}^2=S^2$，故极大似然函数为

$$L_{\Theta_0}(\boldsymbol{X})=\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0}L(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{X})=(2\pi e)^{-n/2}S^{-n}$$

于是，似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{X})=\frac{L_\Theta(\boldsymbol{X})}{L_{\Theta_0}(\boldsymbol{X})}=\frac{S^n}{\prod_{i=1}^m S_i^{n_i}}$$

取对数，得到

$$T_n(\boldsymbol{X})\triangleq 2\log\lambda(\boldsymbol{X})=n\log S^2-\sum_{i=1}^m n_i\log S_i^2$$

由 Wilks 定理 3.1 可知，当 H_0 成立，且 $\min\{n_1,\cdots,n_m\}\to\infty$ 时，有

$$T_n(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\mathscr{L}} \chi_d^2 \qquad d=\dim\Theta-\dim\Theta_0=m-1$$

由此得到大样本检验有水平近似为 α 的拒绝域为

$$D=\{\boldsymbol{X}:T_n(\boldsymbol{X})>\chi_{m-1}^2(\alpha)\}$$

4 一致最优检验 UMPT

4.1 UMPT 定义

设有分布族 $\{f(x;\theta):\theta\in\Theta\}$，其中 Θ 为参数空间。样本 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 为从上述分布族中抽取的简单样本，则参数 θ 的假设检验问题可表示为

$$H_0:\theta\in\Theta_0 \quad\leftrightarrow\quad H_1:\theta\in\Theta_1$$

其中 Θ_0 为参数空间 Θ 的非空真子集，而 $\Theta_1=\Theta-\Theta_0$。

定义 4.1 (一致最优检验 UMPT) 针对上面的假设检验问题，令 $0<\alpha<1$，记 $\varPhi_\alpha$ 为这个检验问题一切水平为 α 的检验的集合。即

$$\varPhi_\alpha=\{\varphi:\beta_\varphi(\theta|\Theta_0)=\mathbb{E}_{\Theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})]\le\alpha\}$$

若 $\varphi\in\varPhi_\alpha$，且对任何检验 $\varphi_1\in\varPhi_\alpha$，都有

$$\beta_\varphi(\theta|\Theta_1)\ge\beta_{\varphi_1}(\theta|\Theta_1)\qquad\forall\,\theta\in\Theta_1$$

则称 φ 为检验问题的一个水平为 α 的 **一致最优检验**（uniformly most powerful test, UMPT）。

注 一致最优检验就是控制犯第 I 类错误概率不超过 α 的条件下，使得犯第 II 类错误概率达到最小。即

$$\text{控制 }\mathbb{P}(\text{type I error})\le\alpha\qquad\text{最小化 }\min_\varphi\ \mathbb{P}(\text{type II error})$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{type I error})&=\beta_\varphi(\theta|\Theta_0)=\mathbb{E}_{\Theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})]\\ \mathbb{P}(\text{type II error})&=1-\beta_\varphi(\theta|\Theta_1)=1-\mathbb{E}_{\Theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})]\end{aligned}$$

不过，UMPT 的存在一般是例外而不常见的。理由如下: 若 Θ_1 包含不止一个点，当在其中取两个不同点 $\theta_1,\theta_2\in\Theta_1$ 时，为使 $\beta_\varphi(\theta_1|\Theta_1)$ 达到最大的那种检验 φ，不见得同时也能使 $\beta_\varphi(\theta_2|\Theta_1)$ 达到最大。

在 Θ_0 和 Θ_1 都只包含一个点时，一般说来 UMPT 存在。这就是下面 Neyman-Pearson 基本引理（简称 NP 引理）的内容。

4.2 Neyman-Pearson 引理

定理 4.1 (Neyman-Pearson 引理) 设样本 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 的概率函数为 $f(\boldsymbol{X};\theta)$，参数 θ 只有两个可能的值 θ_0 和 θ_1，考虑下列检验问题

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

则对任给的 $0 < \alpha < 1$ 有

1. 存在性。对检验问题，必存在一个检验函数 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 及非负常数 c 和 $0 \le r \le 1$，满足条件

   (a).
   $$\varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) > c \\ r, & f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) = c \\ 0, & f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) < c \end{cases} \tag{1}$$

   (b).
   $$\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] = \alpha \tag{2}$$

2. 一致最优性（或充分性）。任何满足式 1 和 2 的检验 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 是检验问题的 UMPT。
3. 唯一性（或必要性）。若 $\varphi^*(\boldsymbol{X})$ 也是检验问题的 UMPT 则必有 $\varphi^*(\boldsymbol{X}) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} \varphi(\boldsymbol{X})$ 在 $\boldsymbol{X} \in S^+ \cup S^-$ 几乎处处（其中 S^+, S^- 定义见后）。又若 $\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi^*(\boldsymbol{X})] < 1$，则有 $\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi^*(\boldsymbol{X})] = \alpha$。

证明 **(A)** 先证明存在性。记随机变量 $f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0)$ 的分布函数为

$$G(y) = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{f(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f(\boldsymbol{X};\theta_0)} \le y\right) \qquad 0 \le y < \infty$$

则 $G(y)$ 具有性质：单调非降，右连续，且 $\lim_{y\to\infty} G(y) = 1$，$G(0) = 0$，则存在 $0 < c < \infty$ 使得 $G(c-0) \le 1-\alpha \le G(c)$。

1. 若 $G(c) = 1-\alpha$，则取 $r = 0$，这时检验函数 φ 满足
$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] &= 1 \times \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{f(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f(\boldsymbol{X};\theta_0)} > c\right) + 0 \times \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{f(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f(\boldsymbol{X};\theta_0)} = c\right) \\ &= 1 - G(c) = \alpha\end{aligned}$$

2. 若 $G(c-0) = 1-\alpha$，则取 $r = 1$，这时检验函数 φ 满足
$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] &= 1 \times \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{f(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f(\boldsymbol{X};\theta_0)} > c\right) + 1 \times \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{f(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f(\boldsymbol{X};\theta_0)} = c\right) \\ &= 1 - G(c) + [G(c) - G(c-0)] = 1 - G(c-0) = \alpha\end{aligned}$$

3. 若 $G(c-0) < 1-\alpha < G(c)$，则取
$$r = \frac{G(c) - (1-\alpha)}{G(c) - G(c-0)}$$

这时检验函数 φ 满足

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] &= 1\times \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{f(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f(\boldsymbol{X};\theta_0)}>c\right)+r\times \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\frac{f(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f(\boldsymbol{X};\theta_0)}=c\right)\\ &=1-G(c)+\frac{G(c)-(1-\alpha)}{G(c)-G(c-0)}\cdot[G(c)-G(c-0)]\\ &=1-G(c)+G(c)-(1-\alpha)=\alpha\end{aligned}$$

综上有，一定存在 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 和 c 使得 $G(c-0)\le 1-\alpha\le G(c)$，且存在 r 使得式 1 和 2 成立，存在性证毕。

(B) 再证一致最优性（或充分性）。即证：满足式 1 和 2 的检验函数 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 是原检验问题的 UMPT。设 $\varphi_1(\boldsymbol{X})$ 为任一个水平为 α 的检验，只需证明：

$$\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})]=\beta_\varphi(\theta|\Theta_1)\ge\beta_{\varphi_1}(\theta|\Theta_1)=\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi_1(\boldsymbol{X})]$$

下面，定义样本空间 $\mathscr{X}$ 上的子集

$$\begin{aligned}S^+&=\left\{\boldsymbol{X}:\lambda(\boldsymbol{X}):=\frac{f(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f(\boldsymbol{X};\theta_0)}>c\right\}=\{\boldsymbol{X}:f(\boldsymbol{X};\theta_1)-c\cdot f(\boldsymbol{X};\theta_0)>0\}\\ S^-&=\left\{\boldsymbol{X}:\lambda(\boldsymbol{X}):=\frac{f(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f(\boldsymbol{X};\theta_0)}<c\right\}=\{\boldsymbol{X}:f(\boldsymbol{X};\theta_1)-c\cdot f(\boldsymbol{X};\theta_0)<0\}\end{aligned}$$

而剩余部分为 $S^0=\mathscr{X}-S^+\cup S^-$。又注意到

1. 当 $\boldsymbol{X}\in S^+$ 时，有 $f(\boldsymbol{X};\theta_1)-c\cdot f(\boldsymbol{X};\theta_0)>0$，其对应的 $\varphi(\boldsymbol{X})=1$，从而有 $\varphi(\boldsymbol{X})-\varphi_1(\boldsymbol{X})\ge 0$，故有
$$A(\boldsymbol{X}):=[\varphi(\boldsymbol{X})-\varphi_1(\boldsymbol{X})]\cdot[f(\boldsymbol{X};\theta_1)-c\cdot f(\boldsymbol{X};\theta_0)]\ge 0$$
2. 当 $\boldsymbol{X}\in S^-$ 时，有 $f(\boldsymbol{X};\theta_1)-c\cdot f(\boldsymbol{X};\theta_0)<0$，其对应的 $\varphi(\boldsymbol{X})=0$，从而有 $\varphi(\boldsymbol{X})-\varphi_1(\boldsymbol{X})\le 0$，故仍有 $A(\boldsymbol{X})\ge 0$。

因此，对任意 $\boldsymbol{X}\in S^+\cup S^-$ 上，必有 $A(\boldsymbol{X})\ge 0$。而对于 $\boldsymbol{X}\in S^0$，即 $f(\boldsymbol{X};\theta_1)-c\cdot f(\boldsymbol{X};\theta_0)=0$，则有 $A(\boldsymbol{X})=0$。因此有积分

$$\int_{\mathscr{X}}A(\boldsymbol{X})\,d\boldsymbol{X}=\int_{S^+\cup S^-}A(\boldsymbol{X})\,d\boldsymbol{X}=\int_{S^+\cup S^-}[\varphi(\boldsymbol{X})-\varphi_1(\boldsymbol{X})]\cdot[f(\boldsymbol{X};\theta_1)-c\cdot f(\boldsymbol{X};\theta_0)]\,d\boldsymbol{X}\ge 0$$

即

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})]-\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi_1(\boldsymbol{X})]&=\int_{\mathscr{X}}\varphi(\boldsymbol{X})f(\boldsymbol{X};\theta_1)\,d\boldsymbol{X}-\int_{\mathscr{X}}\varphi_1(\boldsymbol{X})f(\boldsymbol{X};\theta_1)\,d\boldsymbol{X}\\ &\ge c\cdot\left[\int_{\mathscr{X}}\varphi(\boldsymbol{X})f(\boldsymbol{X};\theta_0)\,d\boldsymbol{X}-\int_{\mathscr{X}}\varphi_1(\boldsymbol{X})f(\boldsymbol{X};\theta_0)\,d\boldsymbol{X}\right]\\ &=c\cdot\{\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})]-\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi_1(\boldsymbol{X})]\}\end{aligned}$$

由 φ 满足式 2 而 φ_1 水平为 α，即有

$$\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})]-\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi_1(\boldsymbol{X})]\ge c\cdot\{\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})]-\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi_1(\boldsymbol{X})]\}=c\cdot\{\alpha-\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi_1(\boldsymbol{X})]\}\ge 0$$

于是，对任意水平为 α 的检验 φ_1 都有 Θ_1 下的效率 $\beta_{\varphi}(\theta|\Theta_1) \geq \beta_{\varphi_1}(\theta|\Theta_1)$ 更优。那么 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 是原问题水平为 α 的 UMPT。

(C) 最后证唯一性。即要证：对 $\boldsymbol{X} \in S^+ \cup S^-$，若 φ^* 也是检验问题的 UMPT，则必有 $\varphi^* \stackrel{\text{a.e.}}{=\!=} \varphi$。若 φ^* 是 UMPT，则必有 $\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi^*(\boldsymbol{X})] \geq \mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})]$；而 φ 也是 UMPT，则也有 $\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})] \geq \mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi^*(\boldsymbol{X})]$。因此有 $\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi^*(\boldsymbol{X})] = \mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})]$。

由 (B) 的推导，取 $\varphi_1 = \varphi^*$，则有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathscr{X}} [\varphi(\boldsymbol{X}) - \varphi^*(\boldsymbol{X})] \cdot [f(\boldsymbol{X};\theta_1) - c \cdot f(\boldsymbol{X};\theta_0)]\, d\boldsymbol{X} \\
=&\int_{S^+ \cup S^-} [\varphi(\boldsymbol{X}) - \varphi^*(\boldsymbol{X})] \cdot [f(\boldsymbol{X};\theta_1) - c \cdot f(\boldsymbol{X};\theta_0)]\, d\boldsymbol{X} \geq 0
\end{aligned}
$$

若上式不取等，则有

$$
\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})] - \mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi_1(\boldsymbol{X})] > c \cdot \{\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] - \mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi_1(\boldsymbol{X})]\} \geq 0
$$

这与 $\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi^*(\boldsymbol{X})] = \mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})]$ 矛盾。于是有

$$
\int_{S^+ \cup S^-} [\varphi(\boldsymbol{X}) - \varphi^*(\boldsymbol{X})] \cdot [f(\boldsymbol{X};\theta_1) - c \cdot f(\boldsymbol{X};\theta_0)]\, d\boldsymbol{X} = 0
$$

即

$$
[\varphi(\boldsymbol{X}) - \varphi^*(\boldsymbol{X})] \cdot [f(\boldsymbol{X};\theta_1) - c \cdot f(\boldsymbol{X};\theta_0)] \stackrel{\text{a.e.}}{=\!=} 0 \qquad \boldsymbol{X} \in S^+ \cup S^-
$$

而在 $S^+ \cup S^-$ 上时，$f(\boldsymbol{X};\theta_1) - c \cdot f(\boldsymbol{X};\theta_0) \neq 0$，因而必有

$$
\varphi(\boldsymbol{X}) - \varphi^*(\boldsymbol{X}) \stackrel{\text{a.e.}}{=\!=} 0 \qquad \boldsymbol{X} \in S^+ \cup S^-
$$

即 $\varphi^*(\boldsymbol{X}) \stackrel{\text{a.e.}}{=\!=} \varphi(\boldsymbol{X})0$，$\boldsymbol{X} \in S^+ \cup S^-$。

最后再证，若 $\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi^*(\boldsymbol{X})] < 1$，则有 $\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi^*(\boldsymbol{X})] = \alpha$。由之前已证的 $\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi^*(\boldsymbol{X})] = \mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})]$，且结合之前 (B) 的不等式，有

$$
0 = \mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})] - \mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi_1(\boldsymbol{X})] \geq c \cdot \{\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] - \mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi_1(\boldsymbol{X})]\} \geq 0
$$

从而有 $c \cdot \{\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] - \mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi_1(\boldsymbol{X})]\} = c \cdot \{\alpha - \mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi_1(\boldsymbol{X})]\} = 0$。若 $c = 0$，则 $S^+ = \{\boldsymbol{X} : \lambda(\boldsymbol{X}) > c = 0\} = \{\boldsymbol{X} : f(\boldsymbol{X};\theta_1) > 0\} = \mathscr{X}$，而当 $\lambda(\boldsymbol{X}) > c$ 时 $\varphi^* = 1$，由此推出

$$
\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi^*(\boldsymbol{X})] = \int_{\mathscr{X}} \varphi^*(\boldsymbol{X}) f(\boldsymbol{X};\theta_1)\, d\boldsymbol{X} = \int_{S^+} \varphi^*(\boldsymbol{X}) f(\boldsymbol{X};\theta_1)\, d\boldsymbol{X} = \int_{S^+} 1 \cdot f(\boldsymbol{X};\theta_1)\, d\boldsymbol{X} = 1
$$

这与假设的 $\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi^*(\boldsymbol{X})] < 1$ 矛盾，因此 $c \neq 0$。故由 $\alpha - \mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi_1(\boldsymbol{X})]$ 可知此时 $\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi_1(\boldsymbol{X})] = \alpha$。综上，在 $S^+ \cup S^-$ 上唯一性证毕。

例 4.1 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 是从正态分布 $N(\theta, 1)$ 中抽取的随机样本，其中 θ 为未知参数，求下列检验问题

$$
H_0 : \theta = 0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta = \theta_1 \; (\theta_1 > 0)
$$

的水平为 α 的 UMPT，其中 θ_1 和 α 给定。

解答 由 NP 引理，先求 $f_0(\boldsymbol{X})$ 和 $f_1(\boldsymbol{X})$ 的表达式

$$f_0(\boldsymbol{X}) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right\}$$
$$f_1(\boldsymbol{X}) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (X_i-\theta_1)^2\right\}$$

似然比可表示为

$$\lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{f_1(\boldsymbol{X})}{f_0(\boldsymbol{X})} = \exp\left\{-\frac{n\theta_1^2}{2} + n\theta_1\bar{X}\right\}$$

显然当 $\theta_1 > 0$ 时，$\lambda(\boldsymbol{X})$ 为 $\bar{X}$ 的严格增函数，故 UMPT 的拒绝域为

$$D = \{\boldsymbol{X} : \lambda(\boldsymbol{X}) > c'\} = \{\boldsymbol{X} : \sqrt{n}\bar{X} > c\}$$

于是构造检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & \lambda(\boldsymbol{X}) \geq c' \\ 0, & \lambda(\boldsymbol{X}) < c' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & U = \sqrt{n}\bar{X} \geq c \\ 0, & U = \sqrt{n}\bar{X} < c \end{cases}$$

当 $H_0 : \theta = 0$ 成立时，$U = \sqrt{n}\bar{X} \sim N(0,1)$，故有

$$\mathbb{E}_0[\varphi(\boldsymbol{X})] = \mathbb{P}(\sqrt{n}\bar{X} > z_\alpha | H_0) = \alpha$$

其中 $c = z_\alpha$ 为标准正态的上 α 分位数点。上面的 φ 满足式 1 和式 2，由 NP 引理 4.1 可知，φ 是原问题 $H_0 : \theta = 0 \leftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1$ 的 UMPT。

特别地，这个 UMPT 不依赖于 θ_1，即对任意 $\theta_1 > 0$ 都是 UMPT，那么这个 φ 也是检验问题

$$H_0 : \theta = 0 \quad \leftrightarrow \quad H_1' : \theta > 0$$

的 UMPT。

例 4.2 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 是从 Bernoulli 分布 $B(1,p)$ 中抽取的随机样本，其中 p 为未知参数，求下列检验问题

$$H_0 : p = p_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : p = p_1 \ (p_1 > p)$$

的水平为 α 的 UMPT，其中 p_1 和 α 给定。

解答 记 $T = T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$，于是有 f_0 和 f_1 的表达式

$$f_0(\boldsymbol{X}) = p_0^T(1-p_0)^{n-T}$$
$$f_1(\boldsymbol{X}) = p_1^T(1-p_1)^{n-T}$$

于是，似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{f_1(\boldsymbol{X})}{f_0(\boldsymbol{X})} = \frac{p_1^T(1-p_1)^{n-T}}{p_0^T(1-p_0)^{n-T}} = \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^n \left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)^T$$

由于 $p_1 > p_0$，所以 $p_1(1-p_0)/p_0(1-p_1) > 1$。故 λ 关于 T 严格单增。而由于 r.v. $T(\boldsymbol{X})$ 服从离散分布，故需要随机化。于是构造检验函数

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & \lambda(\boldsymbol{X}) > c' \\ r, & \lambda(\boldsymbol{X}) = c' \\ 0, & \lambda(\boldsymbol{X}) < c' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & T(\boldsymbol{X}) > c \\ r, & T(\boldsymbol{X}) = c \\ 0, & T(\boldsymbol{X}) < c \end{cases}$$

当 $H_0 : p = p_0$ 成立时，T 服从二项分布 $B(n, p_0)$。当 α 给定时，c 由下列不等式确定

$$\mathbb{P}(T \geq c+1|p=p_0) = \sum_{k=c+1}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \leq \alpha \leq \sum_{k=c}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} = \mathbb{P}(T \geq c|p=p_0)$$

对解出的 c，取

$$r = \frac{\alpha - \mathbb{P}(T \geq c+1|p=p_0)}{\mathbb{P}(T = c|p=p_0)} = \frac{\alpha - \sum_{k=c+1}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k}}{\binom{n}{c} p_0^c (1-p_0)^{n-c}}$$

如此，则有

$$\mathbb{E}_{p_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] = \mathbb{P}(T > c|p=p_0) + r \cdot \mathbb{P}(T = c|p=p_0) = \alpha$$

因此如此检验满足式 1 和式 2，由 NP 引理知，φ 是原检验问题水平为 α 的 UMPT。

特别地，上述检验 φ 与 p_1 无关，故 UMPT 对任意 $p_1 > p_0$ 均成立。即可拓展：检验 φ 也是检验问题

$$H_0 : p = p_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : p > p_0$$

的水平为 α 的 UMPT。

例 4.3 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 是从均匀分布 $U(0, \theta)$ 中抽取的随机样本，其中 $\theta > 0$ 为未知参数，求下列检验问题

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta = \theta_1 \ (\theta_1 > \theta_0 > 0)$$

的水平为 α 的 UMPT。

解答 (方法一：NP 引理) 先求 f_0 和 f_1 的表达式

$$f_0(\boldsymbol{X}) = \theta_0^{-n} \cdot \mathbb{I}(0 < X_{(n)} < \theta_0)$$
$$f_1(\boldsymbol{X}) = \theta_1^{-n} \cdot \mathbb{I}(0 < X_{(n)} < \theta_1)$$

因为 $\theta_1 > \theta_0$，于是似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{f_1(\boldsymbol{X})}{f_0(\boldsymbol{X})} = \begin{cases} \left(\dfrac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n, & 0 < X_{(n)} < \theta_0 \\ \infty, & \theta_0 \leq X_{(n)} \leq \theta_1 \end{cases}$$

此处定义了 $0/0 = \infty$。注意到 $\lambda(\boldsymbol{X})$ 只能取 2 个固定的值，且这两个值与样本 $\boldsymbol{X}$ 无关。那么构造随机化检验函数

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & \lambda(\boldsymbol{X}) > c \\ r, & \lambda(\boldsymbol{X}) = c \\ 0, & \lambda(\boldsymbol{X}) < c \end{cases}$$

因为 λ 只有 2 个值，故 c 的取值有 4 种情况，分别为

$$c \in \mathbb{R} = \left(-\infty, \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\right) \cup \left\{\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\right\} \cup \left(\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n, \infty\right) \cup \{\infty\}$$

对这 5 种情况的 c，求解对应的 r，从而获得 φ。经推导，发现只有在 $c = (\theta_0/\theta_1)^n$ 时存在解。此时取 $r = \alpha$，有

$$\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] = \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\lambda(\boldsymbol{X}) > \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\right) + r \cdot \mathbb{P}_{\theta_0}\left(\lambda(\boldsymbol{X}) = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n\right) = r = \alpha$$

此时，根据 $\lambda(\boldsymbol{X})$ 和 $X_{(n)}$ 的关系，可求 φ 为

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & \theta_0 \le X_{(n)} \le \theta_1 \\ \alpha, & 0 < X_{(n)} < \theta_0 \end{cases}$$

于是，检验 φ 满足式 1 和式 2，从而根据 NP 引理，φ 是原问题的水平为 α 的 UMPT。

解答 (方法二：UMPT 定义) 思路：构造水平为 α 的检验函数 φ'，使得其在 H_1 下的效用等于 UMPT φ 的效用，于是 φ' 就也是 UMPT。

由似然比为

$$\lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{f_1(\boldsymbol{X})}{f_0(\boldsymbol{X})} = \begin{cases} \left(\dfrac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n, & 0 < X_{(n)} < \theta_0 \\ \infty, & X_{(n)} \ge \theta_0 \end{cases}$$

可视为关于 $T = T(\boldsymbol{X}) = X_{(n)}$ 不减函数（连续），于是构造检验函数

$$\varphi'(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(n)} > c \\ 0, & X_{(n)} \le c \end{cases}$$

容易得到 $T = X_{(n)}$ 的密度函数为

$$g_\theta(t) = \frac{nt^{n-1}}{\theta^n} \cdot \mathbb{I}_{(0,\theta)}(t)$$

于是令

$$\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi'(\boldsymbol{X})] = \int_0^\infty \varphi'(t) g_\theta(t)\, dt = \int_c^{\theta_0} \frac{nt^{n-1}}{\theta_0^n}\, dt = 1 - \frac{c^n}{\theta_0^n} = \alpha$$

解出 $c = \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}$，此时

$$\varphi'(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(n)} > \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \\ 0, & X_{(n)} \le \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \end{cases}$$

也是水平为 α 的检验。下面证明：φ' 在 H_1 下的效用等于 UMPT φ 的效用。注意到 φ 的效用 $\beta_\varphi(\theta|\theta_1) = \mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})]$ 为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})] &= 1 \cdot \mathbb{P}_{\theta_1}(\theta_0 \le X_{(n)} \le \theta_1) + \alpha \cdot \mathbb{P}_{\theta_1}(0 < X_{(n)} < \theta_0) \\
&= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{nt^{n-1}}{\theta_1^{n-1}}\, dt + \alpha \cdot \int_0^{\theta_0} \frac{nt^{n-1}}{\theta_1^{n-1}}\, dt \\
&= 1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n + \alpha \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n
\end{aligned}$$

而 φ' 的效用 $\beta_{\varphi'}(\theta|\theta_1) = \mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi'(\boldsymbol{X})]$ 为

$$\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi'(\boldsymbol{X})] = \mathbb{P}_{\theta_1}(X_{(n)} > \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}) = \int_{\theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}}^{\theta_1} \frac{nt^{n-1}}{\theta_1^{n-1}} dt = 1 - (1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n$$

于是 $\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi'(\boldsymbol{X})] = \mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})]$。那么 φ' 也是 UMPT。

注意到无论是 φ 还是 φ'，这两种形式的 UMPT 都与 θ_1 无关。（$\theta_0 \leq X_{(n)} \leq \theta_1$ 可以视为 $X_{(n)} \geq \theta_0$。因为只要 $X_{(n)}$ 大于 θ_0，那么 λ 和 φ, φ' 的值都确定了）。于是 φ, φ' 作为 UMPT 对 $\forall\, \theta_1 > \theta_0$ 都成立。原问题拓展为

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

φ, φ' 仍然是其的 UMPT。

注 上述三个例子，最终的 UMPT 检验函数 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 皆为充分统计量 $T = T(\boldsymbol{X})$ 的函数，下面给出普适性结论。

定理 4.2 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 是从分布族 $\mathscr{F} = \{f(X;\theta) : \theta \in \Theta\}$ 中抽取的随机样本，其中 Θ 为未知参数 θ 的参数空间。记 $T = T(\boldsymbol{X})$ 为 θ 的充分统计量，则由式 1 和式 2 定义的检验函数 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 是充分统计量 T 的函数。即

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i)}\ \ \varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) > c \\ r, & f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) = c \\ 0, & f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) < c \end{cases} \\ \text{(ii)}\ \mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] = \alpha \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\boldsymbol{X}) = \Phi(T(\boldsymbol{X}))$$

证明 由充分统计量 T 和因子分解定理知

$$f(\boldsymbol{X};\theta) = g(T(\boldsymbol{X}), \theta)h(\boldsymbol{X})$$

那么似然比可写成

$$\lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{f(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f(\boldsymbol{X};\theta_0)} = \frac{g(T(\boldsymbol{X}),\theta_1)h(\boldsymbol{X})}{g(T(\boldsymbol{X}),\theta_0)h(\boldsymbol{X})} = \frac{g(T(\boldsymbol{X}),\theta_1)}{g(T(\boldsymbol{X}),\theta_0)}$$

即 $\lambda(\boldsymbol{X})$ 完全由 $T(\boldsymbol{X})$ 决定，故 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 自然是 $T(\boldsymbol{X})$ 的函数。

推论 1 设 φ 是检验问题

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

的水平为 α 的 UMPT，则必有 $\beta_\varphi(\theta_1) \geq \alpha$。特别地，若 $0 < \alpha < 1$ 而 $f(\boldsymbol{X};\theta_0) \neq f(\boldsymbol{X};\theta_1)$，则 $\beta_\varphi(\theta_1) > \alpha$。

证明 设 Φ_α 代表上述问题水平为 α 的检验的集合。构造上述问题的一个检验 $\varphi_1(\boldsymbol{X}) \equiv \alpha$，于是有 $\beta_{\varphi_1}(\theta_0) = \beta_{\varphi_1}(\theta_1) = \alpha$，那么 φ_1 是上述问题水平为 α 的检验，即 $\varphi_1 \in \Phi_\alpha$。又因为 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 是 Φ_α 中的 UMPT，即有 $\beta_\varphi(\theta_1) \geq \beta_{\varphi_1}(\theta_1) = \alpha$ ，证毕。

（反证法）假设 $f(\boldsymbol{X};\theta_0) \neq f(\boldsymbol{X};\theta_1)$，但仍有 $\beta_\varphi(\theta_1) = \alpha \in (0,1)$。那么就有 φ_1 的效用 $\beta_{\varphi_1}(\theta_1) = \beta_\varphi(\theta_1) = \alpha$，说明 φ_1 也是原问题的 UMPT。根据 NP 引理 4.1 的存在性可知，存在 UMPT φ^* 满足形式 1，又由 NP 引理 4.1 的唯一性可知，对 $\boldsymbol{X} \in S^+ \cup S^-$，即 $f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) \neq c$，都有 $\varphi^*(\boldsymbol{X}) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} \varphi_1(\boldsymbol{X}) \equiv \alpha \in (0,1)$。而在 $\boldsymbol{X} \in S^+ \cup S^-$ 上，φ^* 只能为 1 或 0，这与 $\varphi^*(\boldsymbol{X}) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} \alpha \in (0,1)$ 矛盾。于是此时只能是 $\beta_\varphi(\theta_1) > \alpha$，证毕。

4.3 Neyman-Pearson 引理的逆定理

Neyman-Pearson 引理的逆定理：即为 NP 引理 4.1 的唯一性。需要注意的是，唯一性只在 $\boldsymbol{X} \in S^+ \cup S^-$ 上以概率为 1 满足（即 a.s. $\mathbb{P}$），此时检验函数 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 是非随机设计（即不考虑 $= c$ 的情形）。

定理 4.3 (Neyman-Pearson 引理的逆定理) *设 φ 是检验问题*

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

的水平为 α 的 UMPT，则有

1. *必存在 $c \geq 0$ 使得在样本空间 $\mathscr{X}$ 上以概率为 1 成立：*

$$\varphi(\boldsymbol{X}) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} \begin{cases} 1, & f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) > c \\ 0, & f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) < c \end{cases} \qquad \forall\, \boldsymbol{X} \in \mathscr{X}$$

   或者在 $S^+ \cup S^- = \{\boldsymbol{X} : f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) \neq c\}$ 样本子空间上成立：

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) > c \\ 0, & f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) < c \end{cases} \qquad \forall\, \boldsymbol{X} \in S^+ \cup S^-$$

2. *若 $\beta_\varphi(\theta_1) < 1$ 则 $\beta_\varphi(\theta_0) = \alpha$，即*

$$\mathbb{E}_{\theta_1}[\varphi(\boldsymbol{X})] < 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] = \alpha$$

证明 证明见 NP 引理 4.1 的唯一性证明。

4.4 单调似然比分布族 MLR

在之前的问题中，Neyman-Pearson 引理解决了 H_0, H_1 都是单点的假设检验问题的 UMPT；而在 UMPT 与 H_1 的单点无关时，拓展到了 H_0 是单点，而 H_1 是复合的假设检验问题上。下面讨论的是，如何拓展到更一般情况的假设检验问题

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

寻找这类检验问题的 UMPT 的一般想法是

1. 挑选 $\theta_0 \in \Theta_0$ 尽可能与 Θ_1 接近。挑选 $\theta_1 \in \Theta_1$，针对

$$H_0' : \theta = \theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1' : \theta = \theta_1$$

结合 NP 引理 4.1，构造满足式 1 和式 2 的 UMPT 记作 φ_{θ_1}。

2. 若 φ_{θ_1} 与 θ_1 无关，即 $\forall\, \theta_1 \in \Theta_1$ 均有 $\varphi_{\theta_1} = \varphi$ 仍然是 $H_0' \leftrightarrow H_1'$ 的 UMPT。则可拓展到问题

$$H_0' : \theta = \theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

的 UMPT 是 φ。

3. 若当前检验对 $\forall\, \theta \in \Theta_0$ 均有检验水平 α，即 $\beta_\varphi(\theta|\Theta_0) = \mathbb{E}_{\Theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] \leq \alpha$，那么可以拓展到一般问题

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

的 UMPT 仍然是 φ。

但是，上述方法一般是难以成功的。一般只有满足下列条件才可行：(1) 参数空间为一维欧氏空间 $\Theta \subseteq \mathbb{R}$；(2) 假设检验是单边的；(3) 样本分布满足一定条件。

定义 4.2 (单调似然比分布族 MLR) *设 $\boldsymbol{X}$ 服从单参数分布族 $\mathscr{F} = \{f(\boldsymbol{X};\theta) : \theta \in \Theta\}$，参数空间 $\Theta \subseteq \mathbb{R}$。若对参数空间中任意两个参数 $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ 有*

1. *当 $\theta_0 \neq \theta_1$ 时，事件 $\{f(\boldsymbol{X};\theta_0) \neq f(\boldsymbol{X};\theta_1)\}$ 的概率大于 0。*

$$\mathbb{P}(f(\boldsymbol{X};\theta_0) \neq f(\boldsymbol{X};\theta_1)|\theta_0 \neq \theta_1) > 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{X} \in \mathscr{X}$$

2. *当 $\theta_1 > \theta_0$ 时，存在统计量 $T(\boldsymbol{X})$ 使得似然比 $f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0)$ 作为 $\boldsymbol{X}$ 的函数只依赖于 $T(\boldsymbol{X})$，且是 $T(\boldsymbol{X})$ 的非降（或非增）函数。*

$$\lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{f(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f(\boldsymbol{X};\theta_0)} = h[T(\boldsymbol{X})] \quad \text{关于 } T(\boldsymbol{X}) \text{ 单调}$$

*则称该分布族 $\mathscr{F}$ 关于统计量 $T = T(\boldsymbol{X})$ 为单调非降（或非增）似然比分布族，简称**单调似然比分布族**（monotone likelihood ratio family, MLR）。*

对于单调似然比分布族，其单边检验可以由如下结论给出。

定理 4.4 (单调似然比分布族 MLR 的单边检验) *针对单调似然比分布族 $\mathscr{F}$，其样本为 $\boldsymbol{X}$，统计量为 $T(\boldsymbol{X})$。考虑水平为 $\alpha \in (0,1)$ 的单边检验问题：*

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

有如下结论

1. *存在检验函数*

$$\varphi^*(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & T(\boldsymbol{X}) > k \\ r, & T(\boldsymbol{X}) = k \\ 0, & T(\boldsymbol{X}) < k \end{cases} \tag{3}$$

其中 k 和 $r \in [0,1]$ 满足条件

$$\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi^*(\boldsymbol{X})] = \mathbb{P}_{\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) > k) + r \cdot \mathbb{P}_{\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) = k) = \alpha \tag{4}$$

2. 满足上面两式（式 3 和式 4）的检验 $\varphi^*(\boldsymbol{X})$，都有 φ^* 的功效函数 $\beta_{\varphi^*}(\theta)$ 关于 $\theta \in \Theta$ 是不减的。
3. 满足上面两式（式 3 和式 4）的检验 $\varphi^*(\boldsymbol{X})$，是原问题的水平为 α 的 UMPT。

证明 **(1)** 类似 NP 引理 4.1 的证明，对给定 $\alpha \in (0,1)$，存在 $k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) < k) \leq 1-\alpha \leq \mathbb{P}_{\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) \leq k)$$

若 $\mathbb{P}_{\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) = k) = 0$，则取 $r=1$；若 $\mathbb{P}_{\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) = k) > 0$，则取

$$r = \frac{\alpha - \mathbb{P}_{\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) > k)}{\mathbb{P}_{\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) = k)}$$

如此选取 k, r，总能保证形如式 3 的检验 $\varphi^*(\boldsymbol{X})$ 满足式 4。

(2) 任取 $\theta_1 > \theta_0$，考虑单点检验问题

$$H_0' : \theta = \theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1' : \theta = \theta_1$$

根据 NP 引理 4.1，检验问题 $H_0' \leftrightarrow H_1'$ 的 UMPT 检验函数 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 形如

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) > c \\ r, f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) = c \\ 0, f(\boldsymbol{X};\theta_1)/f(\boldsymbol{X};\theta_0) < c \end{cases}$$

其中 c 满足 $\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] = \alpha$。

由样本分布族关于统计量 T 具有单调非降似然比，根据定义 4.2 有

$$\lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{f(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f(\boldsymbol{X};\theta_0)} = h[T(\boldsymbol{X})]$$

若 $h[T(\boldsymbol{X})]$ 关于 T 严格单增，则 NP 引理构造的检验函数 φ 和依赖统计量构造的检验函数 φ^* 是等价形式。若 $h[T(\boldsymbol{X})]$ 关于 T 单调非降不严格，那么我们记 $c = \lambda(\boldsymbol{X})|_{T(\boldsymbol{X})=k} = h(k)$，则 $c > 0$。那么 φ 和 φ^* 的关系为

$$\{\boldsymbol{X} : T(\boldsymbol{X}) > k\} \supseteq \{\boldsymbol{X} : h[T(\boldsymbol{X})] > h(k)\} = \{\boldsymbol{X} : \lambda(\boldsymbol{X}) > c\} \triangleq S^+$$

其中 $\supseteq$ 是因为 $h[T(\boldsymbol{X})]$ 关于 T 单调不严格。同理也有

$$\{\boldsymbol{X} : T(\boldsymbol{X}) < k\} \supseteq \{\boldsymbol{X} : h[T(\boldsymbol{X})] < h(k)\} = \{\boldsymbol{X} : \lambda(\boldsymbol{X}) < c\} \triangleq S^-$$

综合 $h[T(\boldsymbol{X})]$ 的两种情况可知，无论严不严格，都有在 $\boldsymbol{X} \in S^+ \cup S^-$ 上 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 和 $\varphi^*(\boldsymbol{X})$ 取相同的值。根据 NP 引理 4.1 的唯一性可知，φ^* 也是问题 $H_0' \leftrightarrow H_1'$ 的 UMPT。

特别地，注意到 φ^* 检验与 $\forall\, \theta_1 \in \Theta_1$ 无关，故 φ^* 也是问题

$$H_0' : \theta = \theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

的水平为 α 的 UMPT。

下面证明 $\beta_{\varphi^*}(\theta),\ \theta\in\Theta$ 的非降性。即要证明：$\forall\ \theta_1>\theta_0$，都有 $\beta_{\varphi^*}(\theta_1)\geq\beta_{\varphi^*}(\theta_0)$。因为 $\varphi^*(\boldsymbol{X})$ 是 $H_0'\leftrightarrow H_1'$ 的 UMPT，根据推论 1 可知

$$\beta_{\varphi^*}(\theta_1)\geq\alpha=\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi^*(\boldsymbol{X})]=\beta_{\varphi^*}(\theta_0)\qquad\forall\ \theta_1>\theta_0$$

如此证明了 $\beta_{\varphi^*}(\theta),\ \theta\in\Theta$ 的非降性。

(3) 最后证明这样的 φ^* 是检验问题

$$H_0:\theta\leq\theta_0\quad\leftrightarrow\quad H_1:\theta>\theta_0$$

的水平为 α 的 UMPT。由于已经得到 φ^* 是 $H_0'\leftrightarrow H_1$ 的 UMPT，此时拓展 H_0，只需证明 φ^* 针对 $H_0\leftrightarrow H_1$ 是水平为 α 的即可。由 (2) 知 $\beta_{\varphi^*}(\theta)$ 为 θ 的非降函数，故

$$\beta_{\varphi^*}(\theta)\leq\beta_{\varphi^*}(\theta_0)=\alpha\qquad\forall\ \theta\leq\theta_0$$

其中 $\theta\leq\theta_0$ 等价于 H_0 条件。因此 φ^* 拓展到问题 $H_0\leftrightarrow H_1$ 上，即为此问题的水平为 α 的 UMPT，证毕。

检验问题取反，类似地有如下结论。

定理 4.5 (单调似然比分布族 MLR 的单边检验) *针对单调似然比分布族 $\mathscr{F}$，其样本为 $\boldsymbol{X}$，统计量为 $T(\boldsymbol{X})$。考虑水平为 $\alpha\in(0,1)$ 的单边检验问题：*

$$H_0:\theta\geq\theta_0\quad\leftrightarrow\quad H_1:\theta<\theta_0$$

有如下结论

1. *存在检验函数*
$$\varphi^*(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & T(\boldsymbol{X})<k\\ r, & T(\boldsymbol{X})=k\\ 0, & T(\boldsymbol{X})>k\end{cases}\tag{5}$$
其中 k 和 $r\in[0,1]$ 满足条件
$$\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi^*(\boldsymbol{X})]=\mathbb{P}_{\theta_0}(T(\boldsymbol{X})<k)+r\cdot\mathbb{P}_{\theta_0}(T(\boldsymbol{X})=k)=\alpha\tag{6}$$
2. *满足上面两式（式 5 和式 6）的检验 $\varphi^*(\boldsymbol{X})$，都有 φ^* 的功效函数 $\beta_{\varphi^*}(\theta)$ 关于 $\theta\in\Theta$ 是不增的。*
3. *满足上面两式（式 5 和式 6）的检验 $\varphi^*(\boldsymbol{X})$，是原问题的水平为 α 的 UMPT。*

考虑特定的分布族，例如指数族，推导其单边检验问题。

推论 2 (指数族的单边检验) *设样本 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 的分布族为下列单参数指数族：*

$$f(\boldsymbol{X};\theta)=c(\theta)\exp\{Q(\theta)T(\boldsymbol{X})\}h(\boldsymbol{X})\qquad\theta\in\Theta$$

其中 $c(\theta) > 0$, $h(\boldsymbol{X}) > 0$，而 $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ 为参数空间。若 $Q(\theta)$ 在 Θ 上严格单调递增，则对 Θ 的任何内点 $\theta_0 \in \Theta$，求 θ 的单边检验问题。以如下问题为例

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

其 UMPT 存在，且检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & T(\boldsymbol{X}) > c \\ r, & T(\boldsymbol{X}) = c \\ 0, & T(\boldsymbol{X}) < c \end{cases}$$

其中 c 和 $r \in [0, 1]$ 满足条件

$$\mathbb{E}_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] = \mathbb{P}_{\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) > c) + r \cdot \mathbb{P}_{\theta_0}(T(\boldsymbol{X}) = c) = \alpha$$