CH04 区间估计

更新：2026 年 1 月 9 日

目录

1 区间估计

定义 1.1 (区间估计) 设有一个参数分布族 $\mathscr{F} = \{f(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$，$g(\theta)$ 是定义在参数空间 Θ 上的一个已知函数，$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 是从分布族 $\mathscr{F}$ 中抽取的样本。设 $\hat{g}_1(\boldsymbol{X}), \hat{g}_2(\boldsymbol{X}) : \mathscr{X} \to \Theta$，其中 $\mathscr{X}$ 为样本空间，且 $\hat{g}_1(\boldsymbol{X}) \leq \hat{g}_2(\boldsymbol{X})$，则称随机区间

$$[\hat{g}_1(\boldsymbol{X}),\ \hat{g}_1(\boldsymbol{X})] \qquad \hat{g}_1, \hat{g}_2 : \mathscr{X} \to \Theta$$

为 $g(\theta)$ 的一个区间估计（interval estimation）。

1.1 置信区间

- **置信度**

希望随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 包含 θ 的概率 $\mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2)$ 越大越好。这个概率就是前面所说的可靠度，数理统计学上称这个概率为置信度或置信水平。

定义 1.2 (置信水平/置信度，置信系数) 设随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 为参数 θ 的一个区间估计，则 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 包含 θ 的概率

$$\mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2)$$

称为此区间估计的置信水平（confidence level）。置信水平在参数空间 Θ 上的下确界

$$\inf_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2)$$

称为该区间估计的置信系数（confidence efficient）。

- **精度**

精度的标准不止一个。这里介绍其中最常见的一个标准，即随机区间队 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 的平均长度

$$\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1)$$

平均长度越短，精度越高。

例 1.1 设样本 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$。使用 $[\bar{X} - kS/\sqrt{n}, \bar{X} + kS/\sqrt{n}]$ 作为总体均值 μ 的区间估计，考察其置信度和精度。

解答 记 $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，上述区间估计的置信度为

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\bar{X} - kS/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{X} + kS/\sqrt{n}) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(|\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S| \le k) = \mathbb{P}(|T| \le k)$$

其中 $T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S \sim t_{n-1}$ 与 $\boldsymbol{\theta}$ 无关。于是置信度为 $\inf_{\boldsymbol{\theta}} \mathbb{P}(|T| \le k) = \mathbb{P}(|T| \le k)$，显然 k 越大，置信度越大。

又因为 $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$，故精度为

$$l_k = \mathbb{E}\left(\frac{2kS}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2k\mathbb{E}(S)}{\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{2}\Gamma(n/2)\sigma}{\sqrt{n(n-1)}\Gamma((n-1)/2)}k$$

故 k 越大，区间期望长度越大，精度越小。

故区间估计的好坏，需要权衡置信度和精度。Neyman 建议采取如下方案：**在保证置信系数达到指定要求的前提下，尽可能提高精度**。

定义 1.3 (置信区间) 设随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 为参数 θ 的一个区间估计。若对给定的 $0 < \alpha < 1$，有

$$\mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2) \ge 1 - \alpha \quad \forall\, \theta \in \Theta$$

则称 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 是 θ 的置信水平（confidence level）为 $1-\alpha$ 的置信区间（confidence interval）。而 $\inf_\theta \mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2)$ 称为 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 的置信系数。

1.2 置信限

定义 1.4 (置信限) 设 $\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$ 和 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$ 是定义在样本空间 $\mathscr{X}$ 上，在参数空间 Θ 上取值的两个统计量，若对给定的 $0<\alpha<1$ 有

$$\mathbb{P}_\theta(\theta \le \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})) \ge 1-\alpha \quad \forall\, \theta \in \Theta$$
$$\mathbb{P}_\theta(\theta \ge \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})) \ge 1-\alpha \quad \forall\, \theta \in \Theta$$

则分别称 $\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$ 和 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的（单侧）**置信上限**（upper confidence limit）和**置信下限**（lower confidence limit）。上式左端概率在参数空间 Θ 上的下确界分别称为置信上、下限的置信系数。

显然，对置信上限 $\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$ 而言，若 $\mathbb{E}(\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X}))$ 越小，则置信上限精度越高；对置信下限 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$ 而言，若 $\mathbb{E}(\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}))$ 越大，则置信下限的精度越高。

推论 1 设 $\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$ 和 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$ 分别是参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha_1$ 和 $1-\alpha_2$ 的单侧置信下限和置信上限，且对任意样本 $\boldsymbol{X}$ 都有 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \le \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$，则 $[\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})]$ 是 θ 的置信水平为 $1-(\alpha_1+\alpha_2)$ 的双侧置信区间。

证明 由下列事件相互交为空，并为全集

$$\{\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \le \theta \le \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\} \quad \{\theta < \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})\} \quad \{\theta > \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\}$$

可知

$$\mathbb{P}_\theta(\theta < \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})) = 1 - \mathbb{P}_\theta(\theta \ge \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})) < \alpha_1$$
$$\mathbb{P}_\theta(\theta > \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})) = 1 - \mathbb{P}_\theta(\theta \le \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})) < \alpha_2$$

因此有

$$\mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \le \theta \le \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})) = 1 - \mathbb{P}_\theta(\theta < \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})) - \mathbb{P}_\theta(\theta > \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})) \ge 1-(\alpha_1+\alpha_2)$$

所以，$[\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})]$ 是 θ 的置信水平为 $1-(\alpha_1+\alpha_2)$ 的双侧置信区间。

1.3 置信域

定义 1.5 (置信域) 设有一个参数分布族 $\mathscr{F} = \{f(x;\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$，$\Theta$ 是参数空间，其中 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_k) \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$，$k \ge 2$。$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 是来自分布族 $\mathscr{F}$ 的样本。若统计量 $S(\boldsymbol{X})$ 满足

1. 对任一样本 $\boldsymbol{X}$，$S(\boldsymbol{X})$ 是 Θ 的一个子集。
2. 对给定的 $0<\alpha<1$，有任意 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$，有 $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta} \in S(\boldsymbol{X})) \ge 1-\alpha$ 成立。

则称 $S(\boldsymbol{X})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的**置信域**（confidence region）或置信集，而 $\inf_{\boldsymbol{\theta}} \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta} \in S(\boldsymbol{X}))$ 称为置信系数。

2 枢轴变量法——正态总体参数的置信区间

构造置信区间的常见步骤为:

1. 找待估参数 θ 的一个良好点估计，记为 $T(\boldsymbol{X})$。
2. 构造一个有关 T,θ 的函数 $\varphi(T,\theta)$，使其满足:
   (a). $\varphi(T,\theta)$ 的表达式与待估参数 θ 有关。
   (b). $\varphi(T,\theta)$ 的分布与待估参数 θ 无关。
   称其为**枢轴变量**。
3. 对给定的 $0<\alpha<1$，优化如下问题
$$\begin{aligned}&\min_{a,b}\ (b-a)\\&\text{s.t. } \mathbb{P}_\theta(a\le\varphi(T,\theta)\le b)=1-\alpha\end{aligned}$$
   得到常数 a^* 和 b^*（$a^*\le b^*$）。
4. 解不等式 $a^*\le\varphi(T,\theta)\le b^*$，得到 $\hat\theta_1(\boldsymbol{X})\le\theta\le\hat\theta_2(\boldsymbol{X})$，则有
$$\mathbb{P}_\theta(\hat\theta_1(\boldsymbol{X})\le\theta\le\hat\theta_2(\boldsymbol{X}))=1-\alpha$$
   表明 $[\hat\theta_1(\boldsymbol{X}),\hat\theta_2(\boldsymbol{X})]$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

2.1 单个正态总体参数的置信区间

下面对正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的参数 μ,σ^2 构造置信区间。设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 是从 $N(\mu,\sigma^2)$ 抽取的简单样本，记
$$\bar X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\qquad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2$$
分别为样本均值和样本方差。

(1) σ^2 已知，构造 μ 的置信区间

枢轴变量为
$$U=\frac{\sqrt{n}(\bar X-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$$
于是有 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为
$$\left[\bar X-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt n},\bar X+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt n}\right]$$
其中 $z_{\alpha/2}$ 为标准正态分布 $N(0,1)$ 的上侧 $\alpha/2$ 分位数点。

(2) σ^2 未知，构造 μ 的置信区间

枢轴变量为

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}$$

于是有 μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{X} - t_{n-1}(\alpha/2) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1}(\alpha/2) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\right]$$

其中 $t_{n-1}(\alpha/2)$ 是自由度为 $\mathrm{df} = n - 1$ 的 t 分布 t_{n-1} 的上侧 $\alpha/2$ 分位数点。

(3) 构造 σ^2 的置信区间

枢轴变量为

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

于是有 σ^2 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为（直接采用对称的简单情况）

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}}\right]$$

其中 $\chi^2_{n-1}(\alpha/2)$ 是自由度为 $\mathrm{df} = n - 1$ 的 χ^2 分布 χ^2_{n-1} 的上侧 $\alpha/2$ 分位数点。

2.2 两个正态总体参数的置信区间

设 $X_1, \cdots, X_m \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(a, \sigma_1^2)$ 和 $Y_1, \cdots, Y_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(b, \sigma_2^2)$，且 $X_1, \cdots, X_m$ 与 $Y_1, \cdots, Y_n$ 相互独立。

$$\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i \qquad S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j \qquad S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2$$

下面构造总体均值差 $b - a$ 和总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

(1) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知，构造 $b - a$ 的置信区间

枢轴变量为

$$T_\omega = \frac{(\bar{Y} - \bar{X}) - (b - a)}{S_\omega} \Bigg/ \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \sim t_{m+n-2}$$

其中

$$S_\omega^2 = \frac{1}{m+n-2}[(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2] = \frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2\right]$$

于是有 $b - a$ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{Y} - \bar{X} - t_{m+n-2}(\alpha/2) \cdot S_\omega\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}, \bar{Y} - \bar{X} + t_{m+n-2}(\alpha/2) \cdot S_\omega\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\right]$$

其中 $t_{m+n-2}(\alpha/2)$ 是自由度为 $\mathrm{df} = m + n - 2$ 的 t 分布 t_{m+n-2} 的上侧 $\alpha/2$ 分位数点。

(2) 构造 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

枢轴变量为

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F_{m-1,n-1}$$

于是有 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为（直接采用对称的简单情况）

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{m-1,n-1}(\alpha/2)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{m-1,n-1}(1-\alpha/2)}\right]$$

其中 $F_{m-1,n-1}(\alpha/2)$ 是自由度为 $\mathrm{df}_1=m-1,\mathrm{df}_2=n-1$ 的 F 分布 $F_{m-1,n-1}$ 的上侧 $\alpha/2$ 分位数点。

3 枢轴变量法——非正态总体参数的置信区间

3.1 小样本方法

(1) 指数分布参数的置信区间

设 $X_1,\cdots,X_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\mathrm{Exp}(\lambda)$，其密度函数为

$$f(x;\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}\cdot\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\qquad\lambda>0$$

求 λ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间。

注意到 $\bar{X}$ 是 $1/\lambda$ 的 UMVUE，且由指数分布与 Γ 分布的关系，有 $n\bar{X}\sim\Gamma(n,\lambda)$。再由 Γ 分布的性质

$$T=2\lambda(n\bar{X})\sim\chi^2_{2n}$$

为枢轴变量。下面求 a,b 使得

$$\mathbb{P}(a\le 2\lambda n\bar{X}\le b)=1-\alpha$$

无显式表达，故直接考虑对称，如此得到 λ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{\chi^2_{2n}(1-\alpha/2)}{2n\bar{X}},\frac{\chi^2_{2n}(\alpha/2)}{2n\bar{X}}\right]$$

其中 $\chi^2_{2n}(\alpha/2)$ 是自由度 $\mathrm{df}=2n$ 的 χ^2 分布 χ^2_{2n} 的上 $\alpha/2$ 分位数点。

(2) 均匀分布参数的置信区间

设 $X_1,\cdots,X_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}U(0,\theta)$，其密度函数为

$$f(x;\lambda)=\theta^{-1}\cdot\mathbb{I}_{(0,\theta)}(x)\qquad\theta>0$$

求 θ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间。

注意到 $(n+1)X_{(n)}/n$ 是 θ 的 UMVUE，且 $Y_i = X_i/\theta \sim U(0,1)$，同时记 $Y_{(n)} = X_{(n)}/\theta$ 的密度函数为 $f_{Y_{(n)}}(y)$，那么枢轴量为

$$Z = 1/Y_{(n)} = \theta/X_{(n)} \sim g_Z(z)$$

而根据变量代换，可由 $f_{Y_{(n)}}(y)$ 求得 $g_Z(z)$

$$f_{Y_{(n)}}(y) = ny^{n-1}\cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(y) \quad \Rightarrow \quad g_Z(z) = f_{Y_{(n)}}(1/z)\cdot|\partial y/\partial z| = nz^{-(n+1)}\cdot \mathbb{I}_{(1,\infty)}(z)$$

下面求 d_1, d_2 使得

$$\mathbb{P}(d_1 \le \theta/X_{(n)} \le d_2) = \int_{d_1}^{d_2} g_Z(z)\,dz = d_1^{-n} - d_2^{-n} = 1-\alpha$$

同时要求 $\min_{d_1,d_2} d_2 - d_1$，得到最优解为 $d_1 = 1, d_2 = 1/\sqrt[n]{\alpha}$。如此得到 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}}\right]$$

3.2 大样本方法

(1) 基于 MLE 的近似置信区间

设总体 X 的密度函数为 $f(x;\theta)$，令 $\boldsymbol{X} = (X_1,\cdots,X_n)$ 为从总体 X 中抽取的简单样本。那么，由之前的定理，θ 的 MLE $\hat{\theta}_n^* = \hat{\theta}_n^*(\boldsymbol{X})$ 有渐近正态分布

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^* - \theta) \xrightarrow{\mathscr{L}} N(0, [I(\theta)]^{-1})$$

即 $\hat{\theta}_n^*$ 渐近服从 $N(\theta, [nI(\theta)]^{-1})$，此时 $\hat{\theta}_n^*$ 的渐近方差达到了 C-R 下界。其中 $I(\theta)$ 为 Fisher 信息量

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]$$

记 $\sigma^2(\theta) = [I(\theta)]^{-1}$ 未知。用 $\hat{\theta}_n^*$ 代替 θ 来估计渐近方差。大数定律保证

$$\sigma(\hat{\theta}_n^*) \xrightarrow{P} \sigma(\theta)$$

再由 Slutsky 定理可证

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^* - \theta)}{\sigma(\hat{\theta}_n^*)} = \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^* - \theta)}{\sigma(\theta)}\cdot\frac{\sigma(\theta)}{\sigma(\hat{\theta}_n^*)} \xrightarrow{\mathscr{L}} N(0,1)$$

于是枢轴量为

$$T = \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^* - \theta)}{\sigma(\hat{\theta}_n^*)} = \sqrt{n}(\hat{\theta}_n^* - \theta)[I(\hat{\theta}_n^*)]^{-1/2}$$

则有

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^* - \theta)}{\sigma(\hat{\theta}_n^*)}\right| \le z_{\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$$

其中 $z_{\alpha/2}$ 为标准正态分布 $N(0,1)$ 的上 $\alpha/2$ 分位数点。于是 θ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\hat{\theta}_n^* - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma(\hat{\theta}_n^*)}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n^* + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma(\hat{\theta}_n^*)}{\sqrt{n}}\right]$$

(2) 比率 p 的置信区间

设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n) \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} B(1,p)$，则有

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$$

要求 p 的置信区间。

利用中心极限定理，有

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} N(0,1) \quad n\to\infty$$

于是，当 n 充分大时，取枢轴量为

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} N(0,1)$$

包含未知参数 p 且分布已知。那么 $1-\alpha$ 置信区间只需解不等式

$$|T| = \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}\right| \le z_{\alpha/2}$$

其中 $z_{\alpha/2}$ 为标准正态分布 $N(0,1)$ 的上 $\alpha/2$ 分位数点，即有

$$\frac{n(\bar{X}-p)^2}{p(1-p)} \le z_{\alpha/2}^2 \quad \Rightarrow \quad (n+z_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\bar{X}+z_{\alpha/2}^2)p + n\bar{X}^2 \le 0$$

解二次不等式，得到 p 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\frac{n}{n+z_{\alpha/2}^2}\left[\frac{2n\bar{X}+z_{\alpha/2}^2}{2n} \pm z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}+\frac{z_{\alpha/2}^2}{4n^2}}\right]$$

称此置信区间为**得分区间**（score interval）。

也可以使用 $\bar{X}$ 来估计 p，从而估计方差。由 $\bar{X}\xrightarrow{P} p$，可知

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{\bar{X}(1-\bar{X})}} \xrightarrow{P} 1 \qquad \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} N(0,1)$$

由 Slutsky 定理可知，构造新的枢轴量

$$\tilde{T} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{\bar{X}(1-\bar{X})}} \xrightarrow{\mathscr{L}} N(0,1)$$

于是，此时 p 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right]$$

(3) 基于独立同分布样本中心极限定理的近似置信区间

设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 为来自总体 F 的简单随机样本，假设总体均值 μ_F 和总体方差 σ_F^2 存在，则可由中心极限定理得到

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_F)}{\sigma_F} \xrightarrow{\mathscr{L}} N(0,1)$$

求 μ_F 的置信区间，可构造枢轴量

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_F)}{S} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_F)}{\sigma_F} \cdot \frac{\sigma_F}{S} \xrightarrow{\mathscr{L}} N(0,1)$$

这是因为，当 n 充分大，样本标准差 S 是 σ_F 的相合估计，即 $S \xrightarrow{P} \sigma_F$。再由 Slutsky 定理可证。如此 μ_F 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$