

一、 μ_0 作为正态总体均值的似真性

(一). 一元统计推断

① 关于 μ_0 的假设检验

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

检验统计量:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

$$\text{其中 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

当 H_0 成立时 $t \sim t(n-1)$

当 $|t| > t_{\alpha/2}(n-1)$ 时, 拒绝 H_0

② 置信区间

对上, $100(1-\alpha)\%$ 的置信区间:

$$P(|t| \leq t_{\alpha/2}(n-1)) = 1-\alpha$$

推出:

$$CI = \left[\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

(二). 多元统计推断

$$\begin{aligned} & \text{由 } (0, \dots, 0)^T \sim N_p(0, \Sigma) \\ & \text{得 } W_i \sim N(0, 1) \\ & \text{且 } W_i^2 \sim \chi^2(1) \end{aligned}$$

① 关于 $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$ 的假设检验

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

检验统计量:

$$(n-1)S \sim W_{n-1}(\Sigma)$$

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)^T S^{-1} (\bar{X} - \mu_0) \in \mathbb{R}$$

$$\text{其中 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \in \mathbb{R}^p \quad S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

$$\mu_0 = [\mu_{10}, \mu_{20}, \dots, \mu_{p0}] \in \mathbb{R}^p$$

称 T^2 为 Hotelling 统计量

$$\frac{n-p}{p} \cdot \frac{T^2}{n-1} \sim F(p, n-p) \quad \text{当 } H_0 \text{ 成立时}$$

证明: $\frac{df-p+1}{p} \cdot \frac{1}{df} \cdot N_p(0, \Sigma) \cdot \left(\frac{N_{df}(\Sigma)}{df} \right)^{-1} \cdot N_p(0, \Sigma) \sim F(p, df-p+1)$

对 $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid $N_p(\mu, \Sigma)$

在正交变换后, 有 $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}^p$: (省略详细

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0) = z_n \quad \text{变换细节)}$$

$$(n-1)S = \sum_{i=1}^{n-1} z_i z_i^T$$

此时, z_i 还满足: $z_1, z_2, \dots, z_n$ iid $N_p(0, \Sigma)$

此时有:

↓
基础设为 I_p

$$T^2 = z_n^T \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} z_i z_i^T \right)^{-1} z_n$$

$$= (n-1) z_n^T \left(\sum_{i=1}^{n-1} z_i z_i^T \right)^{-1} z_n$$

再次正交变换, 取正交阵 Q . 第一行 $Q[1] = \frac{z_n^T}{\|z_n\|}$

于是:

$$Q z_n = [\|z_n\|, 0, 0, \dots, 0]^T$$

$$\text{有 } T^2 = (n-1) (Q z_n)^T \left(\sum_{i=1}^{n-1} (Q z_i)(Q z_i)^T \right)^{-1} (Q z_n)$$

记 $y_i = Q z_i$ 有

$$\frac{T^2}{n-1} = y_n^T \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i y_i^T \right)^{-1} y_n$$

$$\text{记 } [Q z_1, Q z_2, \dots, Q z_{n-1}] = \begin{bmatrix} z_{(1)}^* \\ z_{(2)}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times (n-1)} \quad \text{其中 } z_{(1)}^* \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\text{而 } z_{(2)}^* \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (p-1)}$$

$$\text{则 } \sum_{i=1}^{n-1} y_i y_i^T = \sum_{i=1}^{n-1} (Q z_i)(Q z_i)^T \cong U$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{(1)}^{*T} \\ \mathbf{z}_{(2)}^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{(1)}^* & \mathbf{z}_{(2)}^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{(1)}^{*T} \mathbf{z}_{(1)}^* & \mathbf{z}_{(1)}^{*T} \mathbf{z}_{(2)}^* \\ \mathbf{z}_{(2)}^{*T} \mathbf{z}_{(1)}^* & \mathbf{z}_{(2)}^{*T} \mathbf{z}_{(2)}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

1×1 $1 \times (p-1)$
 $(p-1) \times 1$ $(p-1) \times (p-1)$

利用矩阵求逆公式：

$$U \text{ 左上角求逆 } U_{11}^* = \left[\mathbf{z}_{(1)}^{*T} \left(\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{z}_{(2)}^* (\mathbf{z}_{(2)}^{*T} \mathbf{z}_{(2)}^*)^{-1} \mathbf{z}_{(2)}^{*T} \right) \mathbf{z}_{(1)}^* \right]$$

(注：上式为标量 $\mathbb{R}$)

$$\text{故 } \frac{T^2}{n-1} = \mathbf{y}_n^T \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{y}_n$$

$$= \|\mathbf{y}_n\|^2 \cdot (U_{11}^*)^{-1}$$

$$= \|\mathbf{y}_n\|^2 / \left[\mathbf{z}_{(1)}^{*T} \left(\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{z}_{(2)}^* (\mathbf{z}_{(2)}^{*T} \mathbf{z}_{(2)}^*)^{-1} \mathbf{z}_{(2)}^{*T} \right) \mathbf{z}_{(1)}^* \right]$$

$$\text{有 } \|\mathbf{y}_n\|^2 = \|\mathbf{Q} \mathbf{z}_n\|^2 \sim \chi^2(p)$$

$$\text{而 } \text{rank} \left(\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{z}_{(2)}^* (\mathbf{z}_{(2)}^{*T} \mathbf{z}_{(2)}^*)^{-1} \mathbf{z}_{(2)}^{*T} \right) \leftarrow \text{幂等阵}$$

$$= \text{tr} \left(\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{z}_{(2)}^* (\mathbf{z}_{(2)}^{*T} \mathbf{z}_{(2)}^*)^{-1} \mathbf{z}_{(2)}^{*T} \right) = n-p$$

$$\text{故 } \mathbf{z}_{(1)}^{*T} \left(\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{z}_{(2)}^* (\mathbf{z}_{(2)}^{*T} \mathbf{z}_{(2)}^*)^{-1} \mathbf{z}_{(2)}^{*T} \right) \mathbf{z}_{(1)}^* \sim \chi^2(n-p)$$

$$\text{故 } \frac{n-p}{p} \cdot \frac{T^2}{n-p} = \frac{\|\mathbf{z}_n\|^2/p}{U_{11}^*/n-p} \sim F(p, n-p)$$

□

性质： T^2 线性变化不变性

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{d}$$

其中 $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 非奇异, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$ 此时

$$T_y^2 = n(\bar{\mathbf{y}} - \mu_{y_0})^T \mathbf{S}_y^{-1} (\bar{\mathbf{y}} - \mu_{y_0})$$

有:

$$\begin{aligned} T_y^2 &= n (\bar{C}(\bar{X} - \mu_0))^T (C S C^T)^{-1} (C(\bar{X} - \mu_0)) \\ &= n (\bar{X} - \mu_0)^T C^T (C S C^T)^{-1} C (\bar{X} - \mu_0) \\ &= n (\bar{X} - \mu_0)^T C^T (C^T)^{-1} S^{-1} C^T C (\bar{X} - \mu_0) \\ &= n (\bar{X} - \mu_0)^T S^{-1} (\bar{X} - \mu_0) \end{aligned}$$

故 $T_y^2 = T^2$

二、 T^2 与 似然比检验

(一). 似然比检验

考虑参数 $\theta \in \Theta$ 对随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合分布: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^p$. 则似然函数为:

$$L(\theta) = f_\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

假设检验:

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1: \theta \notin \Theta_0$$

似然比检验量:

$$\text{Wilks } \Lambda = LRT = \frac{\max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)}{\max_{\theta \in \Theta} L(\theta)}$$

拒绝域: $W = \{ \Lambda \mid \Lambda < c \}$ 即当 $\Lambda < c$ 则拒绝 H_0 .

Wilks 定理: 当大样本时, 有:

$$H_0 \text{ 成立 } (\theta \in \Theta_0) \text{ 有 } -2 \log L(\theta) \xrightarrow{d} \chi^2(m)$$

$$\text{其中 } m = \dim(\Theta) - \dim(\Theta_0)$$

(二). 多元正态, 均值检验的似然比检验

当 $X_1, X_2, \dots, X_n \text{ iid } N_p(\mu, \Sigma)$ 且 $\theta = (\mu, \Sigma)$

则有似然函数:

$$L(\mu, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} \cdot |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right\}$$

假设检验:

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \Sigma > 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1: \mu \neq \mu_0 \quad \Sigma > 0$$

Step 1: $\theta \in \Theta$ max Likelihood

$$\max_{\theta \in \Theta} L(\theta) = \max_{\mu, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} \cdot |\hat{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{np}{2} \right\}$$

$$\text{当 } \mu = \bar{X} \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^T \text{ 取等。}$$

Step 2: $\theta \in \Theta_0$ max Likelihood

$$\max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta) = \max_{\mu = \mu_0, \Sigma > 0} L(\mu, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} \cdot |\hat{\Sigma}_0|^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{np}{2} \right\}$$

$$\text{当 } \mu = \mu_0 \quad \hat{\Sigma}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)(X_i - \mu_0)^T \text{ 取等。}$$

Step 3: $\Lambda = \text{LRT 似然比检验量}$

$$\Lambda = \frac{\max_{\theta \in \Theta} L(\theta)}{\max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)} = \left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{|\hat{\Sigma}_0|} \right)^{\frac{n}{2}}$$

证法①下面联系 T^2 与 Λ

变形 $\hat{\Sigma}_0$:

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)(X_i - \mu_0)^T \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu_0)(X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu_0)^T \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^T + (\bar{X} - \mu_0)(\bar{X} - \mu_0)^T \\
&= \hat{\Sigma} + CC^T \quad (\text{记 } C = (\bar{X} - \mu_0))
\end{aligned}$$

[引理] 对矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 有:

$$|I_m + AB| = |I_n + BA|$$

$$\text{Proof: } \det \begin{pmatrix} I_n & -B_{n \times m} \\ A_{m \times n} & I_m \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I_n & B_{n \times m} \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} I_n & -B_{n \times m} \\ A_{m \times n} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & B_{n \times m} \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A_{m \times n} & AB + I_m \end{pmatrix}$$

$$= \det(I_m + AB)$$

$$\text{同理: } \det \begin{pmatrix} I_n & B_{n \times m} \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I_n & -B_{n \times m} \\ A_{m \times n} & I_m \end{pmatrix} = \det(I_n + BA)$$

$$\text{故 } \det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$$

$$\text{由引理: } |\hat{\Sigma}_0| = |\hat{\Sigma} + CC^T|$$

$$= |\hat{\Sigma}(I_p + \hat{\Sigma}^{-1}CC^T)|$$

$$\text{记 } \hat{\Sigma}^{-1}C \triangleq A \quad C^T \triangleq B \quad \text{可知 } A \in \mathbb{R}^{p \times 1} \quad B \in \mathbb{R}^{1 \times p}$$

$$= |\hat{\Sigma}| |I_p + AB|$$

$$= |\hat{\Sigma}| |I_1 + BA|$$

$$= |\hat{\Sigma}| |1 + C^T \hat{\Sigma}^{-1}C|$$

$$= |\hat{\Sigma}| |1 + (\bar{X} - \mu_0)^T (\frac{n-1}{n} S)^{-1} (\bar{X} - \mu_0)|$$

$$(\text{因为 } \hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^T = \frac{n-1}{n} S)$$

$$\text{故 } \Lambda = \left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{|\hat{\Sigma}_0|} \right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{1 + \frac{T^2}{n-1}} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow \Lambda^{\frac{2}{n}} = \left(1 + \frac{T^2}{n-1} \right)^{-1}$$

拒绝域

$$W_\Lambda = \{ \Lambda \mid \Lambda \leq c_\Lambda \} \Leftrightarrow W_{T^2} = \{ T^2 \mid T^2 \geq c_{T^2} \}$$

$$\frac{n-p}{p} \cdot \frac{T^2}{n-1} \sim F(p, n-p) \quad (1. \text{成立})$$

$$\Lambda^{\frac{2}{n}} = \left(1 + \frac{T^2}{n-1} \right)^{-1}$$

$$\text{有 } c_{T^2} = \frac{(n-1)p}{n-p} F_\alpha(p, n-p)$$

$$c_\Lambda = \left(1 + \frac{c_{T^2}}{n-1} \right)^{-\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{p}{n-p} \cdot F_\alpha(p, n-p) \right)^{-\frac{n}{2}}$$

证法②

结论 5.1 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自正态总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个随机样本. 此时由于 $\Lambda^{2/n} = \left(1 + \frac{T^2}{n-1} \right)^{-1}$, 式(5-7)中根据 T^2 进行的检验等价于 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ 的似然比检验.

证明 令 $(p+1) \times (p+1)$ 矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})' & \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)' \\ \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)' & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

由练习 4.11 知 $|A| = |A_{22}| |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}| = |A_{11}| |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}|$, 从而有

$$\begin{aligned} & (-1) \left| \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})' + n(\bar{x} - \mu_0)(\bar{x} - \mu_0)' \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})' \right| \left| -1 - n(\bar{x} - \mu_0)' \left(\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})' \right)^{-1} (\bar{x} - \mu_0) \right| \end{aligned}$$

根据式(4-14),

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_0)(x_j - \mu_0)' &= \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x} + \bar{x} - \mu_0)(x_j - \bar{x} + \bar{x} - \mu_0)' \\ &= \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})' + n(\bar{x} - \mu_0)(\bar{x} - \mu_0)' \end{aligned}$$

所以前述等式可写为

$$(-1) \left| \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_0)(x_j - \mu_0)' \right| = \left| \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})' \right| (-1) \left(1 + \frac{T^2}{n-1} \right)$$

或

$$|n\hat{\Sigma}_0| = |n\hat{\Sigma}| \left(1 + \frac{T^2}{n-1} \right)$$

于是

$$\Lambda^{2/n} = \frac{|\hat{\Sigma}|}{|\hat{\Sigma}_0|} = \left(1 + \frac{T^2}{n-1} \right)^{-1} \quad (5-14)$$

对小的 $\Lambda^{2/n}$ 值(或等价地对大的 T^2 值), 假设 H_0 将被拒绝. T^2 的临界值由式(5-6)确定. ■

特别地, 若 Σ 已知

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$\text{记 } Z^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu_0)$$

① 总体分布未知

$$\bar{X} \sim N_p(\mu, \frac{1}{n}\Sigma)$$

由中心极限定理:

$$n(\bar{X} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu_0) \sim \chi^2(p)$$

H_0 成立时

$$Z^2 \sim \chi^2(p) \quad (np) \quad \times$$

当 $Z^2 > \chi^2_{\alpha}(p)$ 拒绝 H_0

② 总体分布 $X_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$

有明确分布:

$$Z^2 \sim \chi^2(p) \quad (np) \quad \times$$

三. T^2 检验的几何解释

(一). 广义样本方差

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

$$\text{其中 } S_{ik} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{ji} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)$$

(二). 几何意义

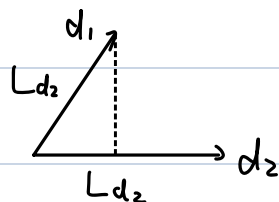
$$\text{记 } y_1 = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})^T \quad y_2 = (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2})^T$$

$$\text{故 } y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{if } d_1 = y_1 - \bar{x}_1 \cdot \vec{1} = (x_{i1} - \bar{x}_1)^T \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\text{同理 } d_2 = y_2 - \bar{x}_2 \cdot \vec{1}$$

对于 d_1, d_2 向量引成的平行四边形



$$S_{\square} = L_{d_1} \cdot L_{d_2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$\text{而 } L_{d_1} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{j1} - \bar{x}_1)^2} = \sqrt{(n-1)S_{11}}$$

$$\text{同理 } L_{d_2} = \sqrt{(n-1)S_{22}}$$

$$\text{而 } d_1^T d_2 = L_{d_1} \cdot L_{d_2} \cdot \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{L_{d_1} L_{d_2}} \cdot \sum_{j=1}^n (x_{j1} - \bar{x}_1)(x_{j2} - \bar{x}_2)$$

$$= \frac{S_{12}}{\sqrt{S_{11}} \sqrt{S_{22}}} = r_{12}$$

$$\text{于是 } S_{\square} = (n-1) \sqrt{S_{11}} \sqrt{S_{22}} \sqrt{1 - r_{12}^2} = (n-1) \sqrt{S_{11} S_{22} (1 - \frac{S_{12}^2}{S_{11} S_{22}})}$$

$$\text{计算此时 } \underline{\det(S)} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{vmatrix} = S_{11} S_{22} - S_{12}^2 = \underline{(\frac{S_{\square}}{n-1})^2}$$

推广:

$$\det(S) = \frac{(\text{体积})^2}{(n-1)^p}$$

$$\text{或 } |(n-1)S| = (\text{体积})^2$$

(三). $\wedge$ 似然比的几何意义

$$\wedge^{\frac{2}{n}} = \frac{|\sum_1|}{|\sum_0|} = \frac{\left| \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T \right|}{\left| \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)(x_i - \mu_0)^T \right|}$$

$$= \frac{|(n-1)S|}{|(n-1)S_0|}$$

几何意义：

分子： $d_1, d_2, \dots, d_p$ 构成的 n 维超立方体的体积的平方

分母：将上述的超几何体中心从 $\bar{X}$ 移到 μ_0 后的体积的平方

$\Lambda^{\frac{2}{n}}$ ：= 看体积平方比。若比例太小，说明交集太小，拒绝 H_0 。

四、置信域与均值分量的联合分布

(一). 置信域

定义：设 θ 为总体未知的参数向量， $\theta \in \Theta$ 记置信域为 $R(X)$ 其中 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ 为未抽样前的样本。

若有 $P(R(X) \text{ 包含真值 } \theta) = 1 - \alpha$ ，则称区域 $R(X)$ 为 θ 的 $1 - \alpha$ 置信域。

(二). p -维正态总体均值的置信域

p -维正态总体均值的置信域是一个椭球，由满足下式的 μ 的集合构成：

$$\mu: n(\bar{X} - \mu)^T S^{-1} (\bar{X} - \mu) \leq \frac{p(n-1)}{n-p} \cdot F_{\alpha}(p, n-p)$$

其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ $S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^T$ ，这是因为有：

$$P\left\{n(\bar{X} - \mu)^T S^{-1} (\bar{X} - \mu) \leq \frac{p(n-1)}{n-p} \cdot F_{\alpha}(p, n-p)\right\} = 1 - \alpha$$

(注：分位点定义不同)

置信域与假设检验

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{v.s.} \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

置信域由所有 T^2 检验在显著性水平 α 下不拒绝 H_0 的 μ_0 的集合。

几何解释

(1) 置信域 相海球中心: $\bar{x}$

(2) 主轴: S 的特轴向量 ($= S^{-1}$ 的特征向量)

$$\text{轴} = \pm \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} \cdot F_{\alpha}(p, n-p)} \cdot e_i$$

$$\text{其中: } S e_i = \lambda e_i \quad i = 1, 2, \dots, p$$

(三). 联合置信表示

设 $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ 对 $\forall X = (X^1, \dots, X^p) \in \mathbb{R}^p$, 记
对一个 X 的线性组合

$$Z = a^T X = a_1 X^1 + a_2 X^2 + \dots + a_p X^p \in \mathbb{R}$$

其中 $a \in \mathbb{R}^p$ 有 $a^T X \in \mathbb{R}$, 有:

$$Z \sim N(a^T \mu, a^T \Sigma a)$$

再设: $X_1, X_2, \dots, X_n$ 来自 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一组随机样本
 $X_j \in \mathbb{R}^p$ 则 $Z_j = a^T X_j \in \mathbb{R}$ 的样本观测值为:

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n \in \mathbb{R}$, 有 Z_j 的样本均值、样本方差:

$$\bar{Z} = a^T \bar{X} \quad S_Z^2 = a^T S a$$

记 $a^T \mu = \mu_Z$ 构造检验统计量:

$$t = \frac{\bar{z} - \mu_z}{S_z / \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} (a^T \bar{X} - a^T \mu)}{\sqrt{a^T S a}}$$

当 $a \in \mathbb{R}^p$ 固定时, 由传统一元置信区间易得:

μ_z (z 的均值) 的置信区间为:

$$\left[\bar{z} - t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{S_z}{\sqrt{n}}, \bar{z} + t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{S_z}{\sqrt{n}} \right]$$

当 a 任意时, 希望找到最大的 t

$$\max_a t^2 = \frac{n(a^T \bar{X} - a^T \mu)^2}{a^T S a}$$

下面寻到这样的 a :

[引理] Cauchy - Schwarz 不等式

设 b 与 d 为 2 个向量, 则有下面不等式成立:

$$(b^T d)^2 = (b^T b) \cdot (d^T d)$$

且等号成立, 当且仅当 $\exists c \in \mathbb{R}$ 有 $b = c d$ 时成立

[引理] 广义 Cauchy - Schwarz 不等式

设 b 与 d 为 2 个向量, $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 为正定阵, 则有:

$$(b^T d)^2 \leq (b^T B b) (d^T B^{-1} d)$$

且等号成立, 当且仅当 $\exists c \in \mathbb{R}$ 有 $b = c B^{-1} d$ 时成立

Proof: 当 $b=0$ 或 $d=0$ 显然, 而 $b \neq 0$ $d \neq 0$ 时:

由于 B 为正定阵, 故 $B = B^{\frac{1}{2}} \cdot B^{\frac{1}{2}}$, 且记:

$$B^{\frac{1}{2}} \triangleq \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} e_i e_i^T$$

$$B^{-\frac{1}{2}} \triangleq \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i e_i^T$$

$$\text{于是 } (b^T d)^2 = (b^T I d)^2 = (b^T B^{\frac{1}{2}} B^{-\frac{1}{2}} d)^2 = [(B^{\frac{1}{2}} b)^T \cdot (B^{-\frac{1}{2}} d)]^2$$

令 $B^{\frac{1}{2}}b = b^*$ $B^{-\frac{1}{2}}d = d^*$ 即可用 Cauchy-Schwarz 证毕

[引理] 极大化引理

令 $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 为正定阵, 且 $d \in \mathbb{R}^p$ 为给定向量, 则对任意非零向量 $x \in \mathbb{R}^p$ 有:

$$\max_{x \neq 0} \frac{(x^T d)^2}{x^T B x} = d^T B^{-1} d$$

对 $\forall c \neq 0$ 当 $x = cB^{-1}d$ 达到最大

结论: 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 来自 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的随机样本, 且 Σ 为正定阵, 则对所有 α 有区间:

$$\left[a^T \bar{X} - \sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} \cdot F_{\alpha}(p, n-p) \cdot a^T S a}, \right.$$

$$\left. a^T \bar{X} + \sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} \cdot F_{\alpha}(p, n-p) \cdot a^T S a} \right]$$

以概率率 $(1-\alpha)$ 包含 $a^T \mu$

Proof: 由极大化引理有:

$$\max_a t^2 = \frac{n(a^T \bar{X} - a^T \mu)^2}{a^T S a}$$

其中 $x = a$ $B = S$ $d = (\bar{X} - \mu)$ 于是有

$$t_{\max}^2 = n \cdot d^T B^{-1} d = n \cdot (\bar{X} - \mu)^T S^{-1} (\bar{X} - \mu) = T^2$$

于是 $a^T \mu$ 的置信区间利用

$$\frac{n(a^T \bar{x} - a^T \mu)^2}{a^T S a} \leq C^2$$

而 $\frac{n-p}{p} \cdot \frac{T^2}{n-1} \sim F(p, n-p)$ 因为此时 $\mu_0 = \mu$

故可推出区间估计, 设有:

$$C^2 = \frac{p(n-1)}{n(n-p)} \cdot F_{\alpha}(p, n-p)$$

推论: 根据结论, 可以得到 $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p]^T$

每个分量 μ_i 的联合 $(1-\alpha)$ 置信区间:

$$\left[\bar{x}_i - \sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} \cdot F_{\alpha}(p, n-p) \cdot \frac{s_{ii}}{n}}, \bar{x}_i + \sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} \cdot F_{\alpha}(p, n-p) \cdot \frac{s_{ii}}{n}} \right]$$

共同满足: 以 $(1-\alpha)$ 的概率包含 μ_i , $i=1, 2, \dots, p$

(取 $a = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$, $a = [0, 1, 0, \dots, 0]^T \dots$)

推论: 若取 $a = [0, \dots, a_i, \dots, a_k, \dots, 0]^T$ $a_i = 1$ $a_k = -1$

可得 $\mu_i - \mu_k$ 的置信区间

几何含义: μ_i 的联合置信区间, 为置信椭圆球在轴上的投影。

(四). 联合置信区间与单一置信区间的比较

① 单一置信区间

不考虑联合分布, 则 μ_i 的 $(1-\alpha)$ 置信区间为:

$$\left(\bar{x}_i - t_{\alpha/2}(n-1) \sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}, \bar{x}_i + t_{\alpha/2}(n-1) \sqrt{\frac{S_{ii}}{n}} \right)$$

这一组区间无法保证 $(1-\alpha)$ 包括 $\mu = \{\mu_i\} \in \mathbb{R}^p$

例如当 $\Sigma = \text{diag}(0_{ii})$, 故相互独立, 于是有

$$P(\text{同时包含所有 } \mu_i) = (1-\alpha)^p$$

若 $\alpha = 0.05 \Rightarrow (1-\alpha)^6 = 0.74 < 0.95$, 失效。

② 联合置信区间

若使用联合置信区间, 则会有 $CI_{\text{联合}}(i)$ 的宽度明显大于 $CI_{\text{单一}}(i)$ 的宽度。表现同样不佳。

表 5.3 对选定的 n 与 p ($1-\alpha=0.95$) 单一 t 区间与 T^2 区间的距离乘数之临界值

n	$t_{n-1}(0.025)$	$\sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p, n-p}(0.05)}$	
		$p=4$	$p=10$
15	2.145	4.14	11.52
25	2.064	3.60	6.39
50	2.010	3.31	5.05
100	1.970	3.19	4.61
∞	1.960	3.08	4.28

(五) 多重比较的庞弗罗尼方法

联合置信与单一置信均有其缺点, 庞弗罗尼方法提供了一种折衷的方法。

假设在得到数据前, 已知 m 个线性组合 $a_1^T \mu, a_2^T \mu, \dots, a_m^T \mu$ 的置信区间。记 C_i 为 $a_i^T \mu$ 的置信表示, 满足 $P(C_i \text{ 为真}) = 1 - \alpha_i \quad i=1, 2, \dots, m$ 则有:

$$\begin{aligned} P(\text{所有 } C_i \text{ 为真}) &= 1 - P(\text{至少有一个 } C_i \text{ 为假}) \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^m P(C_i \text{ 为假}) = 1 - \sum_{i=1}^m (1 - P(C_i \text{ 真})) \\ &= 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m) \end{aligned}$$

最后, 我们给出 μ 的 $1 - \alpha$ 置信:

m 个单一置信:

$$\bar{x}_i \pm t_{\alpha/2m}(n-1) \cdot \sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}, \quad i=1, 2, \dots, m$$

其中 $\alpha_i = \alpha/m$, 于是有:

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_i \pm t_{\alpha/2m}(n-1) \cdot \sqrt{S_{ii}/n} \text{ 包含 } \mu_i) \\ \geq 1 - \sum_{i=1}^m \frac{\alpha}{m} = 1 - \alpha \end{aligned}$$

故最终 **庞弗罗尼方法**

$$\left(\bar{x}_i - t_{\alpha/2p}(n-1) \cdot \sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}, \bar{x}_i + t_{\alpha/2p}(n-1) \cdot \sqrt{\frac{S_{ii}}{n}} \right)$$

比较: 庞弗罗尼方法 v.s. T^2 联合置信

$$\frac{\text{庞弗罗尼区间宽度}}{T^2 \text{区间宽度}} = \frac{t_{\alpha/2m}(n-1)}{\sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} \cdot F_{\alpha}(p, n-p)}}$$

表 5.4 (庞弗罗尼区间宽度)/(T^2 区间宽度)

$$1-\alpha=0.95, \alpha_i=0.05/m$$

n	m=p		
	2	4	10
15	0.88	0.69	0.29
25	0.90	0.75	0.48
50	0.91	0.78	0.58
100	0.91	0.80	0.62
∞	0.91	0.81	0.66

五、总体均值向量的大样本推断

所有 μ 的大样本推断都是建立在 χ^2 分布基础上的, 由

$$n(\bar{X}-\mu)^T S^{-1}(\bar{X}-\mu) \sim \chi^2(p)$$

因此有:

$$P(n(\bar{X}-\mu)^T S^{-1}(\bar{X}-\mu) \leq \chi^2_{\alpha}(p)) = 1-\alpha$$

结论: 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自均值为 μ , 协方差阵为正定的 Σ 的总体的样本。当 $n-p$ 很大时, 若

$$n(\bar{X}-\mu_0)^T S^{-1}(\bar{X}-\mu_0) > \chi^2_{\alpha}(p)$$

在 α 的 CI 下拒绝 $H_0: \mu = \mu_0$

结论: 大样本时, 且 $n-p$ 很大时, μ 的联合置信为

$$(\bar{x}_i \pm \sqrt{\chi^2_{\alpha}(p)} \cdot \sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}) \quad i=1, 2, \dots, p$$

总结: μ 置信区间

小样本	T^2 联合置信 t^2 单一置信 庞弗罗尼方法
大样本	χ^2 分布联合置信

多元质量控制图