一、向量

(一). 定义：

由 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成的数组 X 称为向量

(二). 记号：

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

（转置 x' 或 $x^T = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$）

(三). 线性运算的封闭性

① 数乘 $cx' = [cx_1, cx_2, \cdots, cx_n]$

② 加法 $x'+y' = [x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n]$

(四) 长度 / 模长

$$L_x = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

(五) 角度

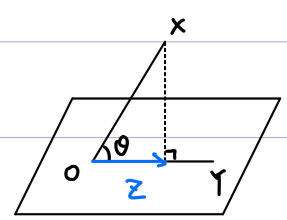
$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{x'y}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

其中 $x'y \triangleq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$

特别地，若 $x'y = 0$ 则 $x \perp y$

(六) 投影

$$z = \frac{x'y}{y'y} \cdot y = \frac{x'y}{L_y} \cdot \frac{y}{L_y}$$



Proof： $z = \|\overrightarrow{OX}\| \cdot \cos\theta \cdot \vec{a}$ 其中 $\vec{a}$ 代表单位

$\because \overrightarrow{OX}$ 向 $\overrightarrow{OY}$ 投影后方向与 $\overrightarrow{OY}$ 相同

$\therefore \quad \vec{\alpha} = \frac{y}{\|y\|}$

$$\Rightarrow \quad z = \|x\| \cdot \frac{x'y}{\|x\| \cdot \|y\|} \cdot \frac{y}{\|y\|} = \frac{x'y}{\|y\|^2} \cdot y \qquad \square$$

(七) 最小二乘法

线性回归模型

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

以矩阵形式展开：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

其中 $Y \in \mathbb{R}^n \quad X \in \mathbb{R}^{n\times(p+1)} \quad \beta \in \mathbb{R}^{p+1} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^n$ （p+1 是包含了截距）

(八) 线性相关 & 线性无关

一组同维向量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 如果存在不全为 0 的常数 c_1, c_2, c_k 使得 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k = 0$ 则称 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 线性相关，否则称为线性无关。

(九) 正交 & 线性无关

若向量正交，则线性无关；反之不成立

$$x \perp y \quad \Rightarrow \quad x, y \text{ 线性无关}$$

$$x, y \text{ 线性无关} \quad \not\Rightarrow \quad x \perp y$$

(十) Gram - Schmit 正交化

线定线性无关向量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 可以构成同一空间的两两正交的向量 $u_1, u_2, \cdots, u_k$

$$u_1 = x_1$$

$$u_2 = x_2 - \frac{x_2' u_1}{u_1' u_1} \cdot u_1$$

$$\vdots$$

$$u_k = x_k - \frac{x_k' u_1}{u_1' u_1} \cdot u_1 - \frac{x_k' u_2}{u_2' u_2} \cdot u_2 - \cdots - \frac{x_k' u_{k-1}}{u_{k-1}' u_{k-1}} \cdot u_{k-1}$$

二、矩阵

(一). 定义

由实数组成的任何数表称为矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

(二). 行列式

$k \times k$ 方称 $A = \{a_{ij}\}$ 的行列式记做 $|A|$ 或 $\det(A)$

(三). 秩

矩阵的秩是线性无关的行向量或列向量的最大数组数

$$R(A) = R_{行}(A) = R_{列}(A)$$

行秩 = 列秩

(四). 非奇异阵

对方阵 $Ax = 0$ 必有 $x = 0$ 则称 A 为非奇异阵

非奇异阵 $\Leftrightarrow$ 满秩 $R(A) = k$ $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$ $\Leftrightarrow$ A 可逆

(五) 矩阵的逆

设 A 为非奇异阵，$A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ 则存在唯一的 $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$ 使得 $AB = BA = I$ 为单位阵。则称 B 为 A 的逆阵，记作 A^{-1}

以下命题等价：

(1) $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

(2) $|A| \neq 0$

(3) $R(A) = k$

(4) A^{-1} 存在

(六) 矩阵的迹

对方阵 $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{k\times k}$，定义迹为对角元素之和：

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}$$

① 性质

$tr(cA) = c\cdot tr(A)$

$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

$tr(AB) = tr(BA)$

$tr(B^{-1}AB) = tr(AB^{-1}B) = tr(A)$

$tr(AA') = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2$

(七) 正交阵

矩阵 A 为正交阵，当且仅当：$AA' = A'A = I$ 即 $A^{-1} = A'$

(A 的所有行/列向量相互正交，且为单位长度)

(八) 特征值与特征向量

① 特征值

(1) 设 $A\in R^{k\times k}$，则满足 $Ax=\lambda x$ 的 λ 称为 A 的特征值。

(2) 设 $A\in \mathbb{R}^{k\times k}$，则满足 $f(\lambda)=|A-\lambda I|=0$ 的 λ 称为 A 的特征值，方程 $f(\lambda)=|A-\lambda I|=0$ 称为特征方程。

② 特征向量

λ 为 A 的特征值，则对于 $Ax=\lambda x$ 的非零向量 x 是 A 关于 λ 的特征向量。

一般对其标准化： $x'x=1$

三、实对称矩阵

(一). 定义

若 $A\in \mathbb{R}^{k\times k}$ 且 $A'=A$，则称为实对称矩阵

(二). 谱分解

对于实对称阵 $A\in \mathbb{R}^{k\times k}$，设其 k 个特征值（有重根）和 k 个特征向量： (λ_1,e_1) (λ_2,e_2) $\cdots$ (λ_k,e_k) 选择其满足 $e_i'e_i=1$

且 e_i 是经过正交化后的（即 $e_i'e_j=0$）

于是 A 可分解为：

$$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e_i e_i'$$

$$=P\Lambda P'$$

$$=[e_1,e_2,\cdots,e_k]\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_k\end{bmatrix}$$

四. 二次型

(一) 定义

对于 $A \in R^{k \times k}$ 的对称阵，对 $\forall x \in R^k$，称二次型为

$$Q(x) = x' A x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j$$

(二). 正定、负定、半正定、半负定

如果对 $\forall x \in R^k$ $x \neq 0$ 均有 $x^T A x > 0$，则称 A 是正定的 (positive definite, PD)，$-A$ 是负定的 (negative definite)

如果对 $\forall x \in R^k$ $x \neq 0$ 均有 $x^T A x \geq 0$ 则称 A 是半正定的 (positive semi-definite, PSD)，$-A$ 是半负定的

性质：

实对称阵是正定的，当且仅当它的特征值均正

实对称阵是半正定的，当且仅当它的特征值均非负

Proof: $x^T A x = x^T P \Lambda P^T x = (P^T x)^T \Lambda (P^T x) \triangleq y^T \Lambda y$