8. 条件独立

——多元正态分布 & 线性回归模型的关联

[边际 & 条件相关性)

Marginal & Conditional Correlations

8.1 正态随机向量的精度矩阵 & 分量间的条件独立性

Precision Matrix : $\Omega = \Sigma^{-1}$

Conditional Independence : $W_{[i]} \perp W_{[j]} \mid \{W_{[k]} : k \in \{1, \cdots, q\} \setminus \{i, j\}\}$

q 维随机变量 $W \sim N(\mu, \Sigma)$，将 W 写成 2 个向量：即

$W = [W_1^T, W_2^T]^T$，相应地 $\mu = [\mu_1^T, \mu_2^T]^T$ $\quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$

我们假设 Σ 和 Σ_{22} 可逆。定义：

$$B = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$$

$$\Omega = \Sigma^{-1}$$

称 $\Omega = \Sigma^{-1}$ 为 精度矩阵 (Precision Matrix)

假设 B 可逆，由正态条件分布：

$$W_1 \mid W_2 \sim N(\mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (W_2 - \mu_2), \ B)$$

① 结论：B 是对角阵 $\iff$ 给定 W_2 时，W_1 各分量条件独立

另一方面，分块矩阵求逆，有：

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}B^{-1} & \Sigma_{22}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}B^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

② 结论：Ω 左上分块 B^{-1} 是对角阵

$\iff$ 给定 W_2 时，W_1 各分量条件独立

③ 结论：

对于任意 $1 \le i < j \le q$，有

$$\Omega[i,j] = 0 \iff W[i] \perp W[j] \mid \{W[k] : k \in \{1,2,\cdots,q\} \setminus \{i,j\}\}$$

进一步，记 Σ_{-ij} 为 Σ 的 (i,j) 余子式（Σ 去掉第 i 行第 j 列的矩阵），令 C 为 Σ 伴随阵，即 $C[i,j] = (-1)^{i+j} \cdot |\Sigma_{-ij}|$，有：

$$\Omega = \Sigma^{-1} = \frac{C}{|\Sigma|} = \frac{C^T}{|\Sigma|}$$

于是有：

$$C[i,j] = 0 \iff \Omega[i,j] = 0$$

推论有：

④结论：

对于任意 $1\le i<j\le q$，有

$$C_{[i,j]}=0 \iff W_{[i]}\perp W_{[j]} \mid \{W_{[k]}: k\in\{1,2,\cdots,q\}\setminus\{i,j\}\}$$

8.2 正态随机向量分量间的线性模型

$W_1 \mid W_{[i]},\ i\in\{2,3,\cdots,q\}$ 的模型

① 构建基于随机设计的线性模型

与8.1相同，定义 q 维随机向量 $W\sim N(\mu,\Sigma)$

记精度矩阵（Precision Matrix）$\Omega=\Sigma^{-1}$

我们研究

$$W_1=W_{[1]}\in\mathbb{R}$$

$$W_2=(W_{[2]},\cdots,W_{[q]})^T\in\mathbb{R}^{q-1}$$

的线性关系。由8.1的相关定义：

$$W=(W_1,W_2^T)^T$$

$$\mu=(\mu_1,\mu_2^T)^T$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{bmatrix}$$

$$\Omega=\Sigma^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & -B^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}B^{-1} & \Sigma_{22}^{-1}+\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}B^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$

在此，因为 $W_1=W_{[1]}\in\mathbb{R}$，故有：

$W_1,\ \mu_1,\ \Sigma_{11},\ B\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $\Sigma_{12}^T,\ \Sigma_{21},\ \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}\in\mathbb{R}^{q-1}$

由 8.1 知 $B \in$ Scaler，故一定可逆

$$W_1 \mid W_2 \sim N(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(W_2 - \mu_2),\ B)$$

记 $\alpha = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mu_2 \in \mathbb{R}$

$\theta = \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12} \in \mathbb{R}^{q-1}$

于是有：W_1 关于 W_2 的条件期望

$$E(W_1 \mid W_2) = \alpha + \theta^T W_2$$

W_1 关于 W_2 的条件方差

$$var(W_1 \mid W_2) = B \in \mathbb{R} \text{ 为常数}$$

即有

$$W_1 = \alpha + \theta^T W_2 + \eta$$

将 $W_1 \in \mathbb{R}$ 视为因变量，$W_2 \in \mathbb{R}^{q-1}$ 视为自变量

$\eta \in \mathbb{R}$ 视为误差项（即白噪声）

$$\eta \perp W_2$$

$$\eta \sim N(0, var(W_1 \mid W_2)) = N(0, B)$$

如此，得到了一个基于随机设计的线性模型 REMINDER

Linear Model with a Random Design

与固定设计不同，自变量 W_2 本身也是一个随机向量

总结：$W = (W_1, W_2^T)^T \sim N(\mu, \Sigma)$

$$W_1 = \alpha + \theta^T \underbrace{W_2 + \eta}_{\text{Random}}$$

$\eta \perp W_2 \quad \eta \sim N(0, B)$

② 分析条件独立

$$\Omega = \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}B^{-1} & \Sigma_{22}^{-1}+\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}B^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

所以，
$$\begin{aligned}\Omega[i,1] &= \Omega[1,i] \\ &= (-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}B^{-1})[i-1] \\ &= -B^{-1}\cdot(\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})[i-1] \\ &= -B^{-1}\cdot\theta[i-1] \qquad i=2,3,\cdots,q\end{aligned}$$

这是因为 $\Omega[1,1] = B^{-1} \in \mathbb{R}$ 为标量，

$\theta = \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \in \mathbb{R}^{q-1}$ 为向量

结合 8.1 的各分量条件独立有：

⑤ 结论：以下三个命题等价：

(1) $\theta[i-1] = 0$

(2) $\Omega[i,1] = 0$

(3) $W[1] \perp W[i] \mid \{W[k] : k \in \{1,2,\cdots,q\} \setminus \{1,i\}\}$

对 $\forall\, i = 2,3,\cdots,q$

一般地，对于 $1 \le i < j \le q$，可以使用以下 2 个方法判断，$W[i]$ 与 $W[j]$ 是否在 W 其他分量给定时条件独立

(1) $\Omega[i,j]$ 是否为 0

(2) $W[i] = \alpha + \theta^T W[\neq i] + \eta$，检验 $\theta[j]$ 是否为 0

W_{ij}前的参数

条件独立 $\xRightarrow{\text{转化为}}$ 回归参数是否为 0

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)BD^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A \in R^{m\times m},\ D \in R^{n\times n},\ \left|A-BD^{-1}C\right| \neq 0$$